cours de mathématiques en troisième

.

Arithmétique ,nombres entiers et rationnels.

1.Introduction aux différents ensembles de nombres :

L'ensemble des réels : Définition :

L'ensemble de tous les nombres se nomme l'ensemble des réels.
On le note $\mathbb{R}$ (de l'allemand real)

Exemple:

Les nombres suivants sont des nombres réels :

$0;1;-3;\sqrt{2};\frac{3}{5};\pi$

L'ensemble des entiers naturels : Définition :

c'est l'ensemble de tous les entiers positifs ou nul.
On le note $\mathbb{N}$ (de l'italien naturale)

Remarque :

$\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4;.....\}$

L'ensemble des entiers relatifs : Définition :

c'est l'ensemble de tous les entiers positifs, négatifs et nul.
On le note $\mathbb{Z}$ (de l'allemand zahlen :compter)

Remarque :

$\mathbb{Z}=\{........;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;.....\}$

L’ensemble des nombres décimaux : Définition :

c’est l’ensemble des nombres qui peuvent s’écrire avec un nombre fini de décimales.
On le note $\mathbb{D}$ (du français décimale) .

Exemple:

Les nombres suivants sont des nombres décimaux :

$0\,;1\,;-3{,}2\,;5{,}689\,;\frac{4}{5}$

par contre 0,333333...... n'est pas un nombre décimal puisque sa partie décimale est infinie.

L’ensemble des nombres rationnels : Définition :

c’est l’ensemble des nombres pouvant s’écrire sous la forme d’une fraction d’entiers relatifs.
On le note $\mathbb{Q}$ (de l’italien quotienté) .

Exemple:

Les nombres suivants sont des nombres rationnels :

$0\,;1\,;-3{,}2\,;7{,}069\,;\frac{4}{5}$

L’ensemble des nombres irrationnels : Définition :

c’est l’ensemble des nombres qui ne sont pas rationnels ; que l’on ne peut donc pas écrire sous forme de fraction.
On le note $\mathbb{R}$ %5C $\mathbb{Q}$(l’ensemble des réels privé des rationnels) .

Exemple:

Les nombres suivants sont des nombres irrationnels :

$\pi\,;\sqrt{2}\,;\sqrt{3}$

2. Etude de l’ensemble des entiers naturels :

Tous les nombres considérés dans ce paragraphe sont des entiers naturels donc appartenant à :

$\mathbb{N}$ = {0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;...}

2.1.Diviseurs et multiples. Définition :

Le nombre a est divisible par b s'il existe un nombre n tel que : a = b x n.
On dit alors que a est multiple de b et de n.

Exemple:

10 = 2x5 donc 10 est divisible par 2 et par 5, et 10 est un multiple de 2 et 5 (il y en a d'autres).

Critères de divisibilité. (rappels de sixième)

- Par 2 : Un nombre est divisible par 2 s'il est pair, c'est-à-dire lorsqu'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

- Par 3 : Un nombre est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.

- Par 5 : Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.

- Par 9 : Un nombre est divisible par 9 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.

Exemple: • 675 est divisible par 9 car 6+7+5=18
et 18 est divisible par 9.
•114 est divisible par 3 car 1+1+4 = 6 et 6 est divisible par 3.

2.2. Diviseurs communs. Définition :

Un diviseur commun de deux nombres a et b est un nombre qui divise à la fois a et b.

Exemple: 3 est un diviseur commun de 114 et 27 car 3 divise 114 (114 = 3x38) et 3 divise 27 (27=3x9).

2.3.Plus Grand Diviseur Commun. Définition :

Le PGCD de deux nombres a et b est le plus grand des diviseurs communs de a et de b.

Définition :

Deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est 1, c'est-à-dire lorsqu'il n'ont comme diviseur commun que le nombre 1.

Exemple: 8 et 27 sont premiers entre eux car ils n'ont comme diviseur commun que 1, leur PGCD est 1.

2.4. Algorithmes de calcul du PGCD de deux nombres a et b. Définition :

Un **algorithme** est une succession de règles ou de procédures bien définies qu'il faut suivre pour obtenir la solution d'un problème dans un nombre fini d'étapes.

a. Algorithme des différences :

Cet algorithme repose sur la propriété suivante :

Propriété :

Soit a et b deux entiers avec a > b, alors PGCD(a ;b) = PGCD (b ;a - b) .

Exemple:

Calculons le PGCD de 675 et 375 par l'algorithme des différences.

pgcd(675 ;375)
= pgcd (Le plus petit; la différence des 2)
= pgcd(375 ;675 - 375)
= pgcd(375 ;300)
= pgcd (300 ; 375 - 300)
= pgcd (300 ; 75)
= pgcd (75 ; 300 - 75)
= pgcd (75 ; 225)
= pgcd (75 ; 225 - 75)
= pgcd (75 ; 150)
= pgcd(75 ;150-75)
= pgcd (75 ; 75)
= pgcd(75,75-75)
= pgcd(75,0)=75

Le plus grand diviseur commun à 75 et 0 est 75.

Donc le pgcd (675 , 375) = 75.

b.Algorithme d'Euclide :

Division euclidienne (rappels sixième) :

Soit a et b deux entiers avec a > b alors il existe un unique couple d'entiers (q,r) tel que a = bq+r (avec r< b)

- a est appelé "le dividende";

- b est appelé "le diviseur";

- q est appelé "le quotient";

- r est appelé "le reste";

Exemple :

Donnons l'égalité de la division euclidienne de 65 par 32.
65 = 32x2+1.

L'algorithme d'Euclide repose sur la propriété suivante :

Propriété :

Soit a et b deux entiers avec a > b et r le reste de la division euclidienne de a par b, alors pgcd (a ; b) = pgcd (b ; r)

Voir biographie d'Euclide.

Exemple :

Reprenons le calcul du PGCD de 675 et 375 par l'algorithme d'Euclide

675 = 375 × 1 + 300 donc pgcd(675;375) = pgcd(375;300)
375 = 300 × 1 + 75 donc pgcd(375;300) = pgcd(300;75)
300 = 4x75 + 0 donc pgcd(300;75) = pgcd(75;0) = 75
Le dernier reste non nul est 75

Donc le pgcd (675,375)=75.

Remarque :

Nous observons l'efficacité de l'algorithme d'Euclide (3 étapes) par rapport à l'algorithme des différence (13 étapes)

3.Les fractions : Définition :

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Propriété :

Si on simplifie une fraction par le PGCD du numérateur et du dénominateur, alors on obtient une fraction irréductible.

Exemple:

D'après précedemment pgcd(675, 375) = 75 .

$$\frac{675}{375}=\frac{675:75}{375:75}=\frac{9}{5}$$

Cette dernière fraction est bien irréductible
car on a simplifié par le pgcd du numérateur et du dénominateur.