

Corrigé du contrôle de maths Terminale : vecteurs, droites et plans de l'espace

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Vecteurs colinéaires et coplanaires	4 points
Exercice 2 : Positions relatives de droites	5 points
Exercice 3 : Intersection d'une droite et d'un plan	4 points
Exercice 4 : Section d'un cube	4 points
Exercice 5 : La grande diagonale du cube	3 points
Total	20 points

Exercice 1 : Vecteurs colinéaires et coplanaires (4 points)

a. On compare les coordonnées : $-2 \times 1 = -2$, $-2 \times (-2) = 4$ et $-2 \times 3 = -6$. Donc $\vec{v} = -2\vec{u}$. **Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.**

b. $\overrightarrow{AB}(3-1; 1-0; 1-2)$, soit $\overrightarrow{AB}(2; 1; -1)$, et $\overrightarrow{AC}(0-1; 2-0; 4-2)$, soit $\overrightarrow{AC}(-1; 2; 2)$.

Supposons qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Alors la première coordonnée donnerait $k = -\frac{1}{2}$ et la deuxième $k = 2$: c'est impossible. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc **A , B et C ne sont pas alignés et définissent un plan (ABC)** .

c. $\overrightarrow{AD}(2-1;3-0;3-2)$, soit $\overrightarrow{AD}(1;3;1)$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2-1;1+2;-1+2)$, soit $(1;3;1)$. Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{AD}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: **les points A, B, C et D sont coplanaires** (D appartient au plan (ABC)).

d. $\overrightarrow{AE}(0;5;4)$. On cherche a et b tels que $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire :

$$2a - b = 0 ; a + 2b = 5 ; -a + 2b = 4 .$$

D'abord, la première équation donne $b = 2a$. Ensuite, la deuxième devient $a + 4a = 5$, donc $a = 1$ et $b = 2$.

Enfin, dans la troisième : $-1 + 2 \times 2 = 3$ et $3 \neq 4$. Le système n'a donc pas de solution : **E n'appartient pas au plan (ABC) .**

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont donc pas coplanaires : **$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.**

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la relation $\vec{v} = -2\vec{u}$, 0,5 point pour la conclusion ; b) 1 point : 0,5 point pour les coordonnées, 0,5 point pour la non-colinéarité justifiée ; c) 1 point : 0,5 point pour le calcul, 0,5 point pour la conclusion ; d) 1 point : 0,5 point pour le système et sa résolution, 0,25 point pour la conclusion sur E, 0,25 point pour la base.

Exercice 2 : Positions relatives de droites (5 points)

a. Un point $M(x;y;z)$ appartient à d_1 si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. **Ainsi, une représentation paramétrique de d_1 est : $x = 1 + 2t$, $y = -1 + t$, $z = 2 - t$, avec $t \in \mathbb{R}$.**

b. On cherche t tel que $1 + 2t = 7$, $-1 + t = 2$ et $2 - t = -1$. La première équation donne $t = 3$. Alors $-1 + 3 = 2$ et $2 - 3 = -1$: les trois équations sont vérifiées. **Donc E appartient à d_1 (paramètre $t = 3$).**

- c. Les vecteurs directeurs $\vec{u}(2;1;-1)$ et $\vec{u}_2(1;-1;1)$ ne sont pas colinéaires ($\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$). Donc les droites ne sont pas parallèles. On résout alors le système :

$$1 + 2t = 1 + s ; \quad -1 + t = 2 - s ; \quad 2 - t = -1 + s .$$

D'abord, la première équation donne $s = 2t$. Ensuite, la deuxième devient $-1 + t = 2 - 2t$, soit $3t = 3$, donc $t = 1$ et $s = 2$.

Vérification dans la troisième : $2 - 1 = 1$ et $-1 + 2 = 1$. Elle est donc vérifiée.

Enfin, le point de d_1 de paramètre $t = 1$ a pour coordonnées $(1 + 2; -1 + 1; 2 - 1)$. **Les droites d_1 et d_2 sont sécantes en $I(3;0;1)$.**

Droites parallèles ou non coplanaires

- d. Un vecteur directeur de d_3 est $\vec{u}_3(-4;-2;2)$. On a $\vec{u}_3 = -2\vec{u}$, donc **d_1 et d_3 sont parallèles.**

Le point $C(0;1;0)$ de d_3 (paramètre $k = 0$) appartient-il à d_1 ? $1 + 2t = 0$ donne $t = -\frac{1}{2}$, et alors $y = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \neq 1$. Ainsi, C n'est pas sur d_1 : **les droites sont strictement parallèles, pas confondues.**

- e. Un vecteur directeur de d_4 est $\vec{u}_4(0;1;1)$. Or il n'est pas colinéaire à $\vec{u}$, car la première coordonnée de $\vec{u}_4$ est nulle, mais pas celle de $\vec{u}$. Les droites ne sont donc pas parallèles.

On cherche ensuite un point commun : $1 + 2t = 0$, $-1 + t = k$, $2 - t = 5 + k$.

La première équation donne $t = -\frac{1}{2}$, puis la deuxième donne $k = -\frac{3}{2}$. Cependant, la troisième donne $k = 2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{5}{2}$. Contradiction : les droites ne sont donc pas sécantes.

Or deux droites ni parallèles ni sécantes ne sont pas dans un même plan : **d_1 et d_4 ne sont pas coplanaires.**

Erreur fréquente : utiliser la même lettre de paramètre pour les deux droites. En effet, il faut deux paramètres différents (t et s). Sinon, on impose que les deux points soient atteints « au même moment ».

Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la non-colinéarité des vecteurs directeurs, 0,5 point pour la résolution, 0,5 point pour la vérification et les coordonnées de I ; d) 1 point : 0,5 point pour le parallélisme, 0,5 point pour le point testé ; e) 1 point : 0,5 point pour la non-colinéarité, 0,5 point pour le système incompatible et la conclusion.

Exercice 3 : Intersection d'une droite et d'un plan (4 points)

- a. $\overrightarrow{AB}(-2;3;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;0;6)$. Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, la première coordonnée impose $k = 1$. Mais alors la deuxième donnerait $0 = 3$: impossible. **Donc A , B et C ne sont pas alignés.**
- b. $\overrightarrow{AD}(-1;1;4)$. On cherche a et b tels que $-2a - 2b = -1$, $3a = 1$ et $6b = 4$.
- Les deux dernières équations donnent $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$. Cependant, dans la première : $-\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -2$ et $-2 \neq -1$.

Par conséquent, le point D n'appartient pas au plan (ABC) .

- c. $\Delta : x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 4 - t$, avec $t \in \mathbb{R}$.
- d. $M(1 + t; 1 + 2t; 4 - t)$, donc $\overrightarrow{AM}(-1 + t; 1 + 2t; 4 - t)$. Ainsi, le point M appartient à (ABC) si et seulement s'il existe a et b tels que :

$$-2a - 2b = -1 + t ; \quad 3a = 1 + 2t ; \quad 6b = 4 - t.$$

Les deux dernières équations donnent $a = \frac{1+2t}{3}$ et $b = \frac{4-t}{6}$. Alors :

$$-2a - 2b = -\frac{2+4t}{3} - \frac{4-t}{3} = -\frac{6+3t}{3} = -2 - t.$$

Donc la première équation devient $-2 - t = -1 + t$, soit $2t = -1$, donc $t = -\frac{1}{2}$.

Puis, pour $t = -\frac{1}{2}$: $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $y = 1 - 1 = 0$, $z = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

Vérification : $a = 0$, $b = \frac{3}{4}$ et $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-\frac{3}{2}; 0; \frac{9}{2})$, qui sont bien celles de $\overrightarrow{AM}$.

La droite Δ coupe le plan (ABC) en un seul point, de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{9}{2}\right)$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point : 0,5 point pour le système, 0,5 point pour la contradiction et la conclusion ; c) 0,5 point ; d) 2 points : 0,5 point pour le système, 1 point pour la valeur de t , 0,5 point pour les coordonnées du point.

Exercice 4 : Section d'un cube (4 points)

- a. Les points I et J appartiennent au plan (IJK) et au plan (ABF) de la face $ABFE$. Ces deux plans sont distincts. En effet, K est situé sur l'arête $[CG]$, hors de la face $ABFE$: il n'appartient donc pas à (ABF) . Or deux plans distincts sécants se coupent selon une droite : ici la droite (IJ) . Ainsi, dans la face, **l'intersection est le segment $[IJ]$** . De même, J et K sont dans le plan (BCG) : **l'intersection avec la face $BCGF$ est le segment $[JK]$** .

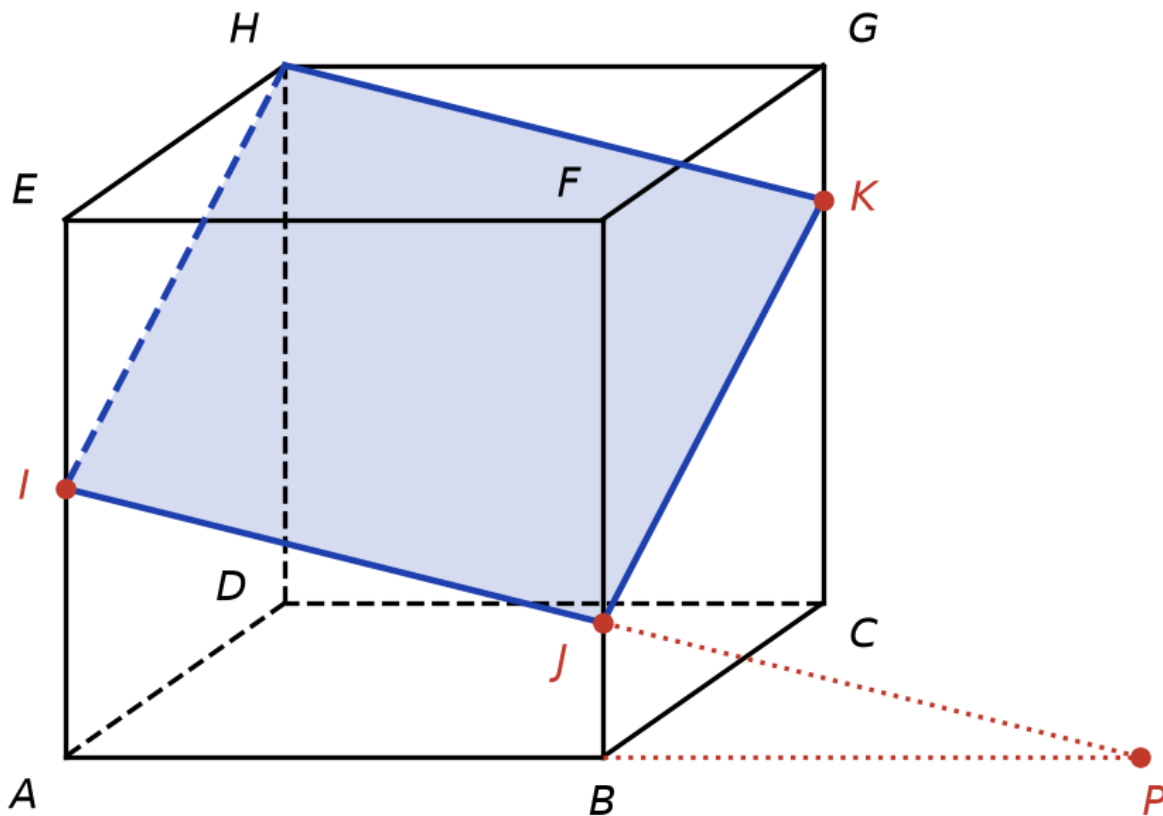
- b. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: $I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$, $J\left(1; 0; \frac{1}{4}\right)$, $K\left(1; 1; \frac{3}{4}\right)$ et $H(0; 1; 1)$.

Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan, alors les droites d'intersection sont parallèles. Or les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles. De plus, le plan (IJK) coupe (BCG) selon (JK) . Il coupe donc (ADH) selon la droite passant par I parallèle à (JK) .

Or $\overrightarrow{JK}\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IH}\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$, donc $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{JK}$: le point H est sur cette parallèle. **L'intersection de (IJK) avec la face $ADHE$ est le segment $[IH]$** .

- c. La face $EFGH$ contient H et K , qui sont dans le plan (IJK) : la section y est donc le segment $[HK]$. **Ainsi, la section du cube est le quadrilatère $IJKH$** . Comme $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{JK}$, on a aussi $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK}$: **$IJKH$ est un parallélogramme**.

- d. $\overrightarrow{IJ}\left(1; 0; -\frac{1}{4}\right)$. La droite (IJ) a pour représentation paramétrique $x = t$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t$. Or la droite (AB) est l'ensemble des points de coordonnées $(x; 0; 0)$. On résout donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t = 0$, soit $t = 2$, et alors $x = 2$. $P(2; 0; 0)$: c'est le point de la demi-droite $[AB)$ tel que $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$, donc B est le milieu de $[AP]$.



Barème : a) 1 point : 0,5 point par intersection justifiée ; b) 1,5 point : 0,5 point pour les coordonnées, 0,5 point pour le théorème des plans parallèles cité, 0,5 point pour $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{JK}$; c) 0,5 point ; d) 1 point : 0,5 point pour la représentation de (IJ) , 0,5 point pour P .

Exercice 5 : La grande diagonale du cube (3 points)

a. $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$ et $G(1;1;1)$. La droite (AG) passe par $A(0;0;0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$: $x = t$, $y = t$, $z = t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

b. $\overrightarrow{BD}(-1;1;0)$ et $\overrightarrow{BE}(-1;0;1)$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, le point $M(t;t;t)$ de (AG) appartient au plan (BDE) si et seulement s'il existe a et b tels que $\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BD} + b\overrightarrow{BE}$. Ici, $\overrightarrow{BM}(t-1;t;t)$:

$$t-1 = -a-b; \quad t = a; \quad t = b.$$

On obtient alors $t-1 = -2t$, soit $3t = 1$, donc $t = \frac{1}{3}$.

$$K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

- c. $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$, donc $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$: le point K est sur le segment $[AG]$, **au tiers de la diagonale en partant de A .**

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour les coordonnées, 0,5 point pour la représentation paramétrique ; b) 1,5 point : 0,5 point pour le système, 0,5 point pour t , 0,5 point pour les coordonnées de K ; c) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : vecteurs, droites et plans de l'espace

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours [« Géométrie dans l'espace » en Terminale](#) et [« Représentation paramétrique et équation cartésienne » en Terminale](#) et [« Le produit scalaire » en Terminale](#) puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [représentations paramétriques et équations cartésiennes](#), [produit scalaire](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : orthogonalité et distances dans l'espace](#)