Corrigé du contrôle de maths Terminale : suites récurrentes et continuité

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Limites candidates	3 points
Exercice 2 : Construction en escargot	4 points
Exercice 3 : Étude complète d'une suite récurrente	8 points
Exercice 4 : Les truites de l'étang	5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Limites candidates (3 points)

a. La fonction $f : x \to 0{,}5x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction affine). Si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell = f(\ell)$, soit $\ell = 0{,}5\ell + 3$, donc $0{,}5\ell = 3$. **La limite de la suite est $\ell = 6$.**

b. Raisonnons par l'absurde : supposons que (v_n) converge vers un réel ℓ. La fonction $x \to x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\ell = \ell^2 + 1$, soit $\ell^2 - \ell + 1 = 0$.

Or le discriminant vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$: ainsi, cette équation n'a pas de solution réelle. C'est donc absurde. **La suite (v_n) ne converge pas.**

c. **Faux.** Contre-exemple : $f(x) = 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$. Pourtant la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$ est géométrique de raison 2 : $u_n = 2^n$, qui tend vers

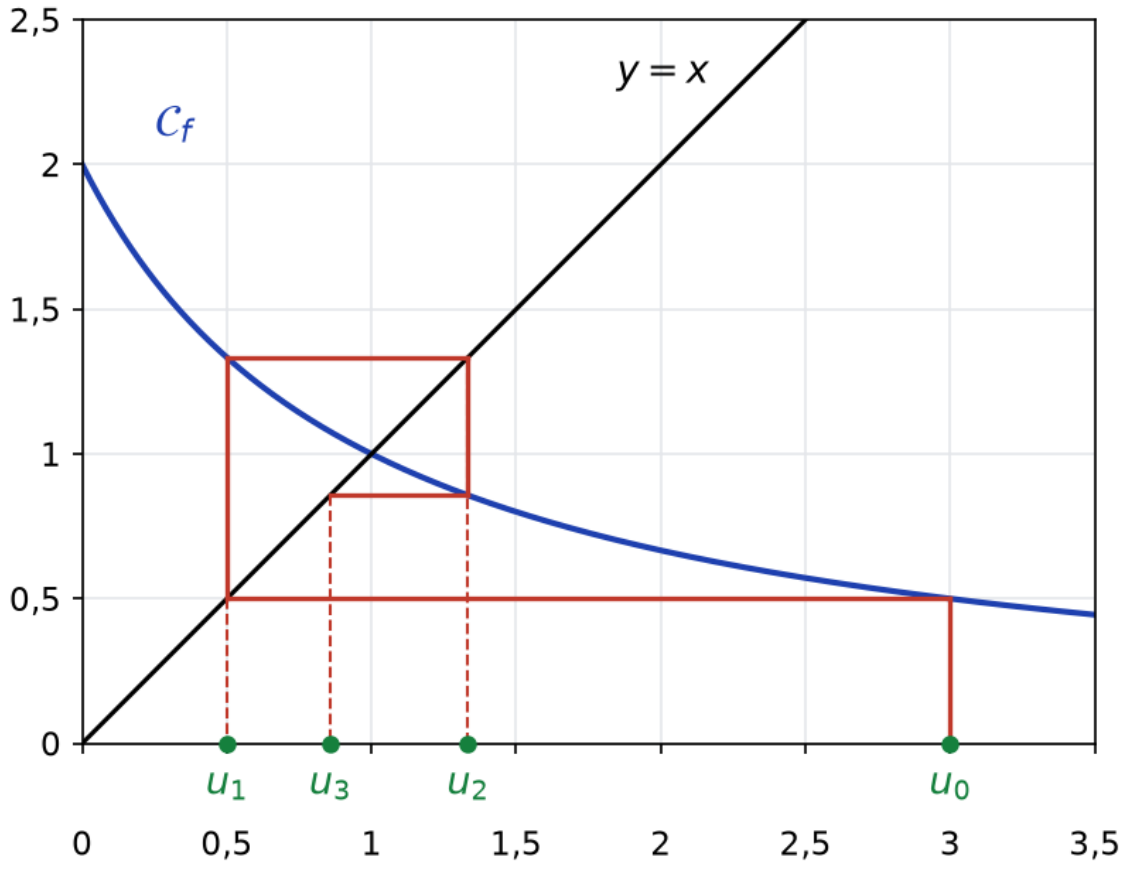
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$+\infty$. En effet, l'équation $f(\ell) = \ell$ donne seulement les limites possibles *si* la suite converge. Elle ne prouve donc pas la convergence.

Barème : a) 0,5 point pour l'équation $f(\ell) = \ell$ avec la continuité, 0,5 point pour la valeur ; b) 0,5 point pour l'équation, 0,5 point pour le discriminant et la conclusion ; c) 0,25 point pour « faux », 0,75 point pour le contre-exemple.

Exercice 2 : Construction en escargot (4 points)

a. D'abord, on part de u_0 sur l'axe des abscisses et on monte jusqu'à $\mathcal{C}_f$: l'ordonnée obtenue est $u_1 = f(u_0)$. Ensuite, on la reporte sur l'axe des abscisses grâce à la droite $y = x$, puis on recommence.



On obtient $u_1 = 0{,}5$, puis u_2 un peu au-dessus de 1,3 et u_3 un peu au-dessous de

0,9.

b. Les termes sont alternativement au-dessus et au-dessous de 1 : $u_0 > u_1$ mais $u_1 < u_2$. **Ainsi, la suite (u_n) ne semble pas monotone. Cependant, elle semble converger vers 1, abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $y = x$.**

c. $u_1 = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$; $u_3 = \frac{2}{1+\frac{4}{3}} = \frac{2}{\frac{7}{3}} = \frac{6}{7}$.

$u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{4}{3}$ et $u_3 = \frac{6}{7}$.

d. Soit ℓ la limite. Puisque tous les termes sont positifs, $\ell \geq 0$. De plus, la fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$, donc $f(\ell) = \ell$: $\frac{2}{1+\ell} = \ell$, soit $\ell^2 + \ell - 2 = 0$, c'est-à-dire $(\ell - 1)(\ell + 2) = 0$. Enfin, puisque $\ell \geq 0$, on écarte -2. **La limite de (u_n) est 1.**

Barème : a) 0,5 point par terme construit avec ses traits de construction ; b) 0,5 point pour la monotonie, 0,5 point pour la limite ; c) 0,25 point pour u_1, 0,25 point pour u_2, 0,5 point pour u_3 ; d) 0,25 point pour l'équation, 0,25 point pour le choix de la solution positive.

Exercice 3 : Étude complète d'une suite récurrente (8 points)

a. **D'après le graphique, la suite (u_n) semble croissante et semble converger vers 3**, abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $y = x$.

b. D'abord, f est un quotient de fonctions dérivables, avec $x + 2 > 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{4(x+2) - (4x+3) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{4x + 8 - 4x - 3}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}.$$

Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

c. On calcule d'abord $u_1 = f(0) = \frac{3}{2}$, puis $u_2 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{6+3}{\frac{3}{2}+2} = \frac{9}{\frac{7}{2}} = \frac{18}{7}$. **$u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_2 = \frac{18}{7}$.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

d. Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ ».

Initialisation. On a $u_0 = 0$ et $u_1 = 1{,}5$, donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. Puisque f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, on peut alors appliquer f sans changer le sens des inégalités : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(3)$.

Or $f(0) = 1{,}5$, $f(3) = \frac{15}{5} = 3$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. Donc $1{,}5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$, et a fortiori $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc **pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.**

e. D'après d, pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$: la suite est donc croissante. De plus, $u_n \leq 3$: elle est ainsi majorée par 3. **D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.**

f. D'abord, les inégalités $0 \leq u_n \leq 3$ passent à la limite : $0 \leq \ell \leq 3$. Ensuite, la fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $\ell = f(\ell)$.

Or $\frac{4\ell+3}{\ell+2} = \ell$ équivaut à $4\ell + 3 = \ell^2 + 2\ell$, soit $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$, c'est-à-dire $(\ell - 3)(\ell + 1) = 0$.

Donc $\ell = 3$ ou $\ell = -1$; comme $\ell \geq 0$, **la suite (u_n) converge vers 3.**

g. La ligne à compléter est `u = (4*u + 3) / (u + 2)`.

Ensuite, à la calculatrice : $u_3 = \frac{93}{32} \approx 2{,}9063$; $u_4 = \frac{468}{157} \approx 2{,}9809$; $u_5 = \frac{2343}{782} \approx 2{,}9962$. Ainsi, $u_4 \leq 2{,}99$ et $u_5 > 2{,}99$.

Par conséquent, la fonction renvoie 5.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,25 point par terme ; d) 0,5 point pour l'initialisation, 1 point pour l'hérédité (utilisation de la croissance de f, calcul de $f(0)$ et $f(3)$), 0,5 point pour la conclusion ; e) 0,5 point pour la monotonie et la majoration, 0,5 point pour le théorème cité ; f) 0,5 point pour la continuité et $f(\ell) = \ell$, 0,5 point pour la résolution, 0,5 point pour le choix de la solution ; g) 0,75 point pour la ligne, 0,75 point pour la valeur 5.

Erreur fréquente : dans l'hérédité, écrire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ sans dire que c'est la croissance de f qui le permet. En effet, c'est justement l'argument que le correcteur note.

Exercice 4 : Les truites de l'étang (5 points)

a. $u_1 = 1{,}5 \times 1{,}4 - 0{,}5 \times 1{,}4^2 = 2{,}1 - 0{,}98 = 1{,}12$.

$u_2 = 1{,}5 \times 1{,}12 - 0{,}5 \times 1{,}12^2 = 1{,}68 - 0{,}6272 = 1{,}0528$.

$u_1 = 1{,}12$ **et** $u_2 = 1{,}0528$ **: au 1er janvier 2027, l'étang devrait abriter 1 120 truites.**

b. On a $f'(x) = 1{,}5 - x$, donc $1{,}5 - x \geq 0$ pour $x \leq 1{,}5$. f **est croissante sur** $[0\ ;\ 1{,}5]$ **.**

c. Pour tout entier naturel n , notons $P(n)$: « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1{,}4$ ».

Initialisation. $u_1 = 1{,}12$ et $u_0 = 1{,}4$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1{,}4$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier n : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1{,}4$. Or ces nombres sont dans $[0\ ;\ 1{,}5]$ où f est croissante, donc $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1{,}4)$.

Or $f(1) = 1{,}5 - 0{,}5 = 1$ et $f(1{,}4) = 1{,}12$, donc $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1{,}12 \leq 1{,}4$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. **Pour tout entier naturel** n **,** $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1{,}4$ **.**

d. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ tel que $1 \leq \ell \leq 1{,}4$.

De plus, f est continue sur $[0\ ;\ 1{,}5]$ (fonction polynôme), donc $f(\ell) = \ell$: $1{,}5\ell - 0{,}5\ell^2 = \ell$, soit $0{,}5\ell - 0{,}5\ell^2 = 0$, c'est-à-dire $0{,}5\ell(1 - \ell) = 0$.

Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$; comme $\ell \geq 1$, **la suite** (u_n) **converge vers 1.**

e. **Ainsi, à long terme, la population de truites diminue et se stabilise autour de 1 000 truites.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Barème : a) 0,25 point pour les calculs, 0,25 point pour l'interprétation ; b) 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour le signe ; c) 0,5 point pour l'initialisation, 0,75 point pour l'hérédité, 0,25 point pour la conclusion ; d) 0,5 point pour la convergence, 0,5 point pour l'équation, 0,5 point pour le choix de la limite ; e) 0,5 point.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : suites récurrentes et continuité

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « Fonction continue » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** continuité et théorème des valeurs intermédiaires.

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP à la Terminale.

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- Contrôle de maths Terminale : continuité et valeurs intermédiaires