

Corrigé du contrôle de maths Terminale : suites et fonction logarithme

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : La valeur d'une voiture	4 points
Exercice 2 : Étude de la fonction $x - \ln x$	6 points
Exercice 3 : Une suite définie avec $\ln$	6 points
Exercice 4 : Le logarithme des termes d'une suite	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : La valeur d'une voiture (4 points)

- a. Baisser de 15 %, c'est multiplier par $1 - 0,15 = 0,85$. Pour tout entier naturel n ,
$$v_{n+1} = 0,85 v_n .$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = 24\,000$. Donc $v_n = 24\,000 \times 0,85^n$.

- b. $v_5 = 24\,000 \times 0,85^5 \approx 10\,648,93$

Au bout de 5 ans, la voiture vaut environ 10 649 €.

- c. $24\,000 \times 0,85^n < 6\,000$

$$0,85^n < 0,25$$

$$n \ln(0,85) < \ln(0,25) \text{ (la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[)$$

$$n > \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,85)} \text{ (car } \ln(0,85) < 0, \text{ l'inégalité change de sens)}$$

$$\frac{\ln(0,25)}{\ln(0,85)} \approx 8,53, \text{ donc l'inéquation équivaut à } n \geq 9.$$

$$\text{Contrôle : } v_8 \approx 6\,540 \text{ et } v_9 \approx 5\,559.$$

La valeur passe sous 6 000 € la 9^e année. Camille doit donc revendre sa voiture au plus tard 8 ans après l'achat.

$$\text{d. } 0 < 0,85 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Barème : a) 0,5 point pour la raison justifiée, 0,5 point pour l'expression ; b) 1 point ; c) 0,5 point pour le passage au logarithme, 0,5 point pour le changement de sens justifié, 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point.

Erreur fréquente : écrire $n < 8,53$ en oubliant que $\ln(0,85)$ est négatif.

Exercice 2 : Étude de la fonction $x - \ln x$ (6 points)

$$\text{a. En } 0 : \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = +\infty. \text{ De plus, } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \text{ donc par somme } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

$$\text{En } +\infty : \text{ par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1. \text{ Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ alors par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\text{b. } f \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[\text{ et } f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Sur $]0; +\infty[$, $x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$. Il est ainsi négatif sur $]0; 1[$, nul en 1, positif sur $]1; +\infty[$.

$$f(1) = 1 - \ln 1 = 1.$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

f est strictement décroissante sur $]0; 1]$, strictement croissante sur $[1; +\infty[$, et son minimum est $f(1) = 1$.

c. $f''(x) = \frac{1}{x^2}$. Pour tout $x > 0$, $f''(x) > 0$.

La fonction f est convexe sur $]0; +\infty[$.

d. D'après le tableau de variations, le minimum de f sur $]0; +\infty[$ est 1. Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 1$.

$$x - \ln x \geq 1, \text{ donc } x - 1 \geq \ln x.$$

Pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. (Graphiquement : la courbe de ln est sous sa tangente au point d'abscisse 1.)

Barème : a) 0,5 point pour la limite en 0, 1 point pour la limite en $+\infty$ avec les croissances comparées citées ; b) 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour le signe, 1 point pour le tableau complet (limites et minimum) ; c) 0,5 point pour f'' , 0,5 point pour la conclusion ; d) 1 point pour l'utilisation du minimum, 0,5 point pour la conclusion.

Erreur fréquente : conclure en $+\infty$ par « $+\infty - \infty$ ». En effet, c'est une forme indéterminée,

d'où la factorisation par x .

Exercice 3 : Une suite définie avec $\ln$ (6 points)

a. $u_1 = 2 - \ln 2 \approx 1,307$

$$u_2 = u_1 - \ln(u_1) \approx 1,039$$

$u_1 \approx 1,307$ et $u_2 \approx 1,039$. Ainsi, la figure suggère que **la suite est décroissante et converge vers 1**. En effet, 1 est l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite $y = x$.

Question b : démonstration par récurrence

b. Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$ la propriété « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ ».

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 \approx 1,307$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 2$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$. Or, d'après l'exercice 2, f est croissante sur $[1; +\infty[$, donc sur $[1; 2]$. Par conséquent, elle conserve l'ordre :

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(2)$$

c'est-à-dire $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 2 - \ln 2$. Comme $2 - \ln 2 \leq 2$, on obtient $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 2$: $P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire. Ainsi, **pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$** .

Questions c à e : convergence et limite de la suite

c. D'après b, la suite (u_n) est décroissante ($u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par 1. Donc, d'après le théorème de convergence monotone, **la suite (u_n) converge**. Sa limite ℓ est alors comprise entre 1 et 2.

d. $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell - \ln \ell = \ell \Leftrightarrow \ln \ell = 0 \Leftrightarrow \ell = 1$

(L'égalité $f(\ell) = \ell$ vient de la continuité de f sur $[1;2]$: on passe à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$.)

La suite (u_n) converge donc vers 1, ce qui confirme la conjecture.

e. Enfin, à la calculatrice : $u_3 - 1 \approx 7,5 \times 10^{-4}$ et $u_4 - 1 \approx 2,8 \times 10^{-7}$.

Le plus petit entier cherché est $n = 4$.

Barème : a) 0,5 point pour les deux termes, 0,5 point pour la conjecture ; b) 0,5 point pour l'initialisation, 1 point pour l'hérédité (croissance de f citée), 0,5 point pour la conclusion ; c) 1 point avec le théorème cité ; d) 1 point pour la résolution, 0,5 point pour la conclusion ; e) 0,5 point.

Erreur fréquente : dire « la suite est décroissante, donc elle tend vers $-\infty$ » ou « elle est minorée par 1, donc elle tend vers 1 ». En effet, la convergence vient du théorème. Quant à la valeur de la limite, elle vient de l'équation $f(\ell) = \ell$.

Exercice 4 : Le logarithme des termes d'une suite (4 points)

a. $v_1 = \sqrt{e \times e^3} = \sqrt{e^4} = e^2$. $v_1 = e^2$.

b. Pour tout entier naturel n , $v_n > 0$, donc :

$$\ln(v_{n+1}) = \ln(\sqrt{e} v_n) = \frac{1}{2} \ln(e v_n) = \frac{1}{2} (1 + \ln(v_n))$$

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(v_n) - 1 = \frac{1}{2} \ln(v_n) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\ln(v_n) - 1) = \frac{1}{2} w_n$$

$$w_0 = \ln(e^3) - 1 = 3 - 1 = 2$$

La suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = 2$.

c. $w_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\ln(v_n) = w_n + 1 = 1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ donc } v_n = e^{1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

(Contrôle : pour $n = 1$, $e^1 + 1 = e^2 = v_1$.)

d. $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$.

Or la fonction exponentielle est continue en 1, donc par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^1 = e$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point pour le calcul de w_{n+1} avec les propriétés de $\ln$, 0,5 point pour w_0 ; c) 0,5 point pour w_n , 0,5 point pour v_n ; d) 0,5 point pour la limite de w_n , 0,5 point pour la conclusion par composition.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : suites et fonction logarithme

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours [« Le raisonnement par récurrence » en Terminale](#) et [« Les suites numériques » en Terminale](#) et [« La fonction logarithme népérien » en Terminale](#) puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [la récurrence](#), [suites numériques](#), [logarithmes](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : raisonnement par récurrence et suites](#)
- [Contrôle de maths Terminale : limites de suites et convergence](#)
- [Contrôle de maths Terminale : équations et inéquations avec \$\ln\$](#)
- [Contrôle de maths Terminale : étude de fonctions avec logarithme](#)