# Corrigé du contrôle de maths Terminale : raisonnement par récurrence et suites

**Barème du contrôle**

| Exercice | Points |
|---|---|
| Exercice 1 : Une formule explicite | 3 points |
| Exercice 2 : Une inégalité avec les puissances de 2 | 4 points |
| Exercice 3 : Suite définie par une fonction | 6 points |
| Exercice 4 : Vrai ou faux sur les suites | 3 points |
| Exercice 5 : Les carrés de tuiles de Maëlys | 4 points |
| **Total** | **20 points** |

## Exercice 1 : Une formule explicite (3 points)

a. D'abord, $u_1 = 3u_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = 4$. Ensuite, $u_2 = 3u_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$. $u_1 = 4$ **et** $u_2 = 10$ **.**

b. Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n = 3^n + 1$ ».

**Initialisation :** $3^0 + 1 = 1 + 1 = 2 = u_0$, donc $P(0)$ est vraie.

**Hérédité :** soit $n$ un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = 3^n + 1$ (hypothèse de récurrence). On montre alors que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$u_{n+1} = 3^{n+1} + 1$.

Ainsi, $u_{n+1} = 3u_n - 2 = 3\left(3^n + 1\right) - 2 = 3^{n+1} + 3 - 2 = 3^{n+1} + 1$.

Donc $P(n+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** $P(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc par récurrence, **pour tout entier naturel** $n$, $u_n = 3^n + 1$.

*Barème : a) 0,25 point par terme ; b) 0,5 point pour l'initialisation, 1,5 point pour l'hérédité (dont 0,5 point pour l'utilisation explicite de l'hypothèse de récurrence), 0,5 point pour la conclusion.*

## Exercice 2 : Une inégalité avec les puissances de 2 (4 points)

a. Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ : « $2^n \geq n + 1$ ».

**Initialisation :** $2^0 = 1$ et $0 + 1 = 1$, donc $2^0 \geq 0 + 1$ : $P(0)$ est vraie.

**Hérédité :** soit $n$ un entier naturel tel que $2^n \geq n + 1$. On veut alors montrer que $2^{n+1} \geq n + 2$.

En multipliant par 2, qui est positif, on obtient ainsi : $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2(n + 1) = 2n + 2$.

Or $2n + 2 - (n + 2) = n \geq 0$, donc $2n + 2 \geq n + 2$.

Par transitivité, on a donc $2^{n+1} \geq n + 2$ : $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** par récurrence, **pour tout entier naturel** $n$, $2^n \geq n+1$.

b. Soit $M$ un réel quelconque. Il existe un entier naturel $n$ tel que $n \geq M$ (par exemple $n = 0$ si $M \leq 0$, ou un entier supérieur à $M$ sinon). Pour cet entier, d'après a), $2^n \geq n+1 > n \geq M$, donc $2^n > M$. Ainsi, aucun réel $M$ ne majore tous les termes : **la suite** $(2^n)$ **n'est pas majorée.**

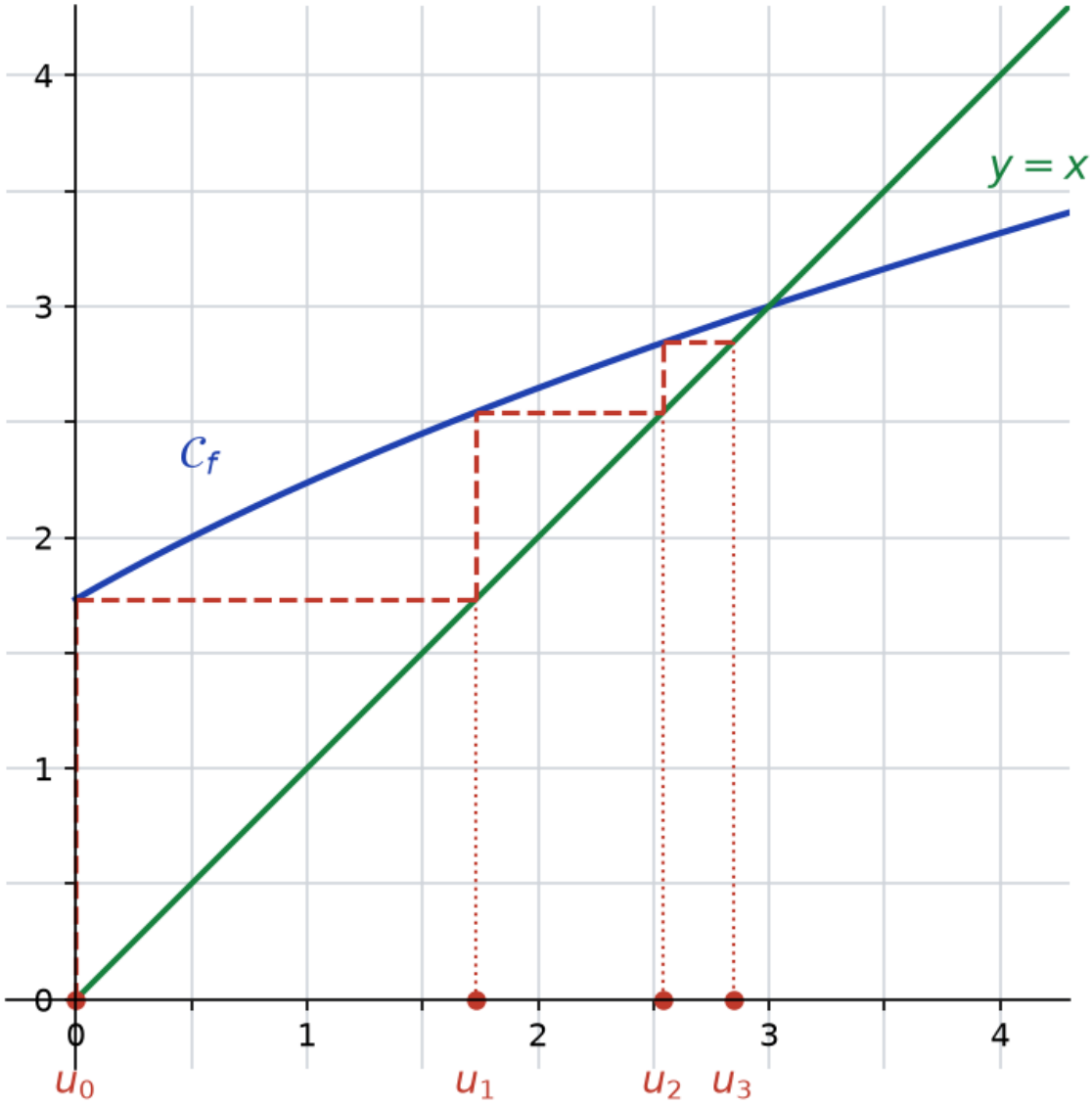
**Erreur fréquente :** dans l'hérédité, écrire $2^{n+1} \geq n+2$ dès la première ligne, c'est-à-dire partir de ce qu'on veut démontrer. Au contraire, on part de l'hypothèse $2^n \geq n+1$ et on arrive à la conclusion.

*Barème : a) 0,5 point pour l'initialisation, 2 points pour l'hérédité (1 point pour la multiplication par 2, 1 point pour la comparaison de* $2n+2$ *et* $n+2$*), 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour le choix de l'entier* $n$*, 0,5 point pour l'enchaînement des inégalités et la conclusion.*

## Exercice 3 : Suite définie par une fonction (6 points)

a. On part de $u_0 = 0$ sur l'axe des abscisses. Puis on monte verticalement jusqu'à la courbe : l'ordonnée obtenue est $f(u_0) = u_1$. Ensuite, on la reporte sur l'axe des abscisses grâce à la droite $y = x$, et on recommence.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.




On lit alors $u_1 \approx 1{,}7$, $u_2 \approx 2{,}5$ et $u_3 \approx 2{,}8$. **On conjecture donc que la suite $(u_n)$ est croissante (et que ses termes se rapprochent de 3).**

b. La fonction $x \to 2x + 3$ est affine de coefficient $2 > 0$, donc croissante, et elle est positive sur $[0\,;+\infty[$. De plus, la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Par composition, $f$ est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.

On peut aussi dériver : $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0$.

De plus $f(3) = \sqrt{2 \times 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$. **$f$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $f(3) = 3$.**

c. Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ ».

## Question c : la récurrence sur l'encadrement

**Initialisation :** $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \sqrt{3} \approx 1{,}73$. On a bien $0 \leq 0 \leq \sqrt{3} \leq 3$, donc $P(0)$ est vraie.

**Hérédité :** soit $n$ un entier naturel tel que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. La fonction $f$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc elle conserve l'ordre :

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(3)$, c'est-à-dire $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$.

Comme $0 \leq \sqrt{3}$, on obtient alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$ : $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** par récurrence, **pour tout entier naturel** $n$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

d. Pour tout $n$, $u_n \leq u_{n+1}$ : **la suite** $(u_n)$ **est croissante.** Ensuite, pour tout $n$, $0 \leq u_n \leq 3$ : **la suite est minorée par 0 et majorée par 3, donc bornée.**

**Erreur fréquente :** appliquer $f$ aux inégalités sans dire que $f$ est croissante sur l'intervalle qui contient tous les nombres en jeu. En effet, c'est cet argument qui permet de conserver l'ordre.

*Barème : a) 1 point pour la construction avec les traits, 0,5 point pour la conjecture ; b) 0,75 point pour la croissance justifiée, 0,25 point pour $f(3)$ ; c) 0,5 point pour l'initialisation, 1,5 point pour l'hérédité (croissance de $f$ citée), 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point pour le sens de variation, 0,5 point pour le caractère borné.*

# Exercice 4 : Vrai ou faux sur les suites (3 points)

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

a. Pour tout $n$, $(-1)^n$ vaut $1$ ou $-1$, donc $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et $1 \leq a_n \leq 3$. Ainsi, la suite est minorée par 1 et majorée par 3. **Affirmation 1 vraie.**

b. Si $(b_n)$ est croissante, alors pour tout entier naturel $n$, $b_n \geq b_0$ (on le démontre par récurrence : $b_0 \geq b_0$, et si $b_n \geq b_0$ alors $b_{n+1} \geq b_n \geq b_0$). La suite est donc minorée par son premier terme $b_0$. **Affirmation 2 vraie.**

c. $w_3 = 9 - 18 + 1 = -8$ et $w_4 = 16 - 24 + 1 = -7$. On a $w_4 > w_3$, donc la suite n'est pas décroissante. En effet,
$w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 - 6(n+1) + 1 - n^2 + 6n - 1 = 2n - 5$, qui est positif dès que $n \geq 3$. **Affirmation 3 fausse.**

*Barème : pour chaque affirmation, 0,25 point pour la réponse vrai ou faux, 0,75 point pour la justification (un contre-exemple suffit pour l'affirmation 3).*

## Exercice 5 : Les carrés de tuiles de Maëlys (4 points)

a. $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 1 + 3 = 4$, $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 4 + 5 = 9$ et $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 9 + 7 = 16$. On reconnaît alors les carrés $1^2$, $2^2$, $3^2$, $4^2$ : **on conjecture que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = (n+1)^2$.**

b. Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ : « $u_n = (n+1)^2$ ».

**Initialisation :** $(0+1)^2 = 1 = u_0$, donc $P(0)$ est vraie.

**Hérédité :** soit $n$ un entier naturel tel que $u_n = (n+1)^2$. Alors :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$

Or $(n+2)^2 = \big((n+1)+1\big)^2$, donc $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** par récurrence, **pour tout entier naturel** $n$, $u_n = (n+1)^2$.

c. L'étape $n$ demande $(n+1)^2$ tuiles. Or $45^2 = 2\,025 \leq 2\,026$ et $46^2 = 2\,116 > 2\,026$. L'étape pour laquelle $n+1 = 45$ est donc réalisable et la suivante ne l'est pas, car la suite $(u_n)$ est croissante. **La dernière étape que Maëlys peut réaliser est l'étape 44, avec 2 025 tuiles (il lui en reste une).**

**Erreur fréquente :** en c), répondre « étape 45 » en oubliant que l'étape $n$ est un carré de côté $n+1$.

*Barème : a) 0,5 point pour les trois termes, 0,5 point pour la conjecture ; b) 0,5 point pour l'initialisation, 1 point pour l'hérédité, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour l'encadrement par 45 et 46 au carré, 0,5 point pour la réponse étape 44.*

**Revenir à l'énoncé du contrôle**

## Après le corrigé du contrôle : raisonnement par récurrence et suites

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « Le raisonnement par récurrence » en Terminale et « Les suites numériques » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** la récurrence, suites numériques.

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP à la Terminale.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

## Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- Contrôle de maths Terminale : limites de suites et convergence
- Contrôle de maths Terminale : suites et fonction logarithme