

Corrigé du contrôle de maths Terminale : primitives de fonctions usuelles

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Vérifier une primitive	3 points
Exercice 2 : Primitives de fonctions usuelles	6 points
Exercice 3 : Primitive vérifiant une condition	3 points
Exercice 4 : Une primitive de $x e^x$	4 points
Exercice 5 : L'altitude d'un drone	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Vérifier une primitive (3 points)

Pour montrer que F est une primitive de f sur un intervalle I , on vérifie que F est dérivable sur I et que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I .

- a. F est dérivable sur $]0; +\infty[$. La dérivée de $x \ln x$ (produit) est $1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$, donc :

$$F'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

F est une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

b. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par la dérivée d'un produit :

$$G'(x) = 2x e^x + (x^2 + 1)e^x = (x^2 + 2x + 1)e^x = (x + 1)^2 e^x = g(x).$$

G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

c. Pour tout réel x , $1 + e^x > 0$, donc $H = \ln u$ avec $u(x) = 1 + e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $H' = \frac{u'}{u}$:

$$H'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = h(x). \quad H \text{ est une primitive de } h.$$

Les primitives de h sont les fonctions $H + C$, C réel : **par exemple**
 $x \rightarrow \ln(1 + e^x) + 5$.

Barème : a) 1 point (0,5 pour la dérivée de $x \ln x$, 0,5 pour la conclusion) ; b) 1 point (0,5 pour la dérivée du produit, 0,5 pour la factorisation $(x + 1)^2$) ; c) 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour une autre primitive.

Exercice 2 : Primitives de fonctions usuelles (6 points)

a. Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, de x est $\frac{x^2}{2}$, et de $-\frac{1}{x^2}$ est $\frac{1}{x}$. Donc :

$$F_1(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + \frac{2}{x}.$$

b. Avec $u(x) = x^2 + x + 3$, $u'(x) = 2x + 1$: $f_2 = u' u^4$, dont une primitive est $\frac{u^5}{5}$.

$$F_2(x) = \frac{(x^2 + x + 3)^5}{5}.$$

c. Avec $u(x) = x^2 + 4 > 0$, $u'(x) = 2x$: $f_3(x) = 3 \times \frac{2x}{x^2 + 4} = 3 \frac{u'(x)}{u(x)}$, dont une primitive est $3 \ln u$.

$$F_3(x) = 3 \ln(x^2 + 4).$$

d. Une primitive de $e^{3x} - 1$ est $\frac{1}{3}e^{3x} - x$. Avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$:

$$x e^{x^2} = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}, \text{ de primitive } \frac{1}{2} e^{x^2}.$$

$$F_4(x) = \frac{1}{3} e^{3x-1} + \frac{1}{2} e^{x^2}.$$

e. Avec $u(x) = 2x + 5 > 0$ sur $]-\frac{5}{2}; +\infty[$, $u'(x) = 2$: $f_5(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, qui est la dérivée de $\sqrt{u}$.

$$F_5(x) = \sqrt{2x+5}.$$

f. Une primitive de $\cos(ax+b)$ est $\frac{1}{a}\sin(ax+b)$; une primitive de $-\sin x$ est $\cos x$.

$$F_6(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos x.$$

Erreur fréquente : oublier le coefficient correcteur, par exemple écrire e^{3x-1} comme primitive de e^{3x-1} : en dérivant, on obtient $3e^{3x-1}$, d'où le facteur $\frac{1}{3}$.

Barème : 1 point par primitive (0,5 pour la forme usuelle reconnue, 0,5 pour le bon coefficient) ; toute réponse juste vérifiée par dérivation reçoit la totalité des points.

Exercice 3 : Primitive vérifiant une condition (3 points)

a. Avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$: $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)^2}$. Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$.

Les primitives de f sont donc $F(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C$, C réel.

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{3}{2}.$$

$$F(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(x^2+1)}.$$

b. Sur $]0; +\infty[$, les primitives de g sont $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \ln x + C$, C réel.

$$G(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^2 - \ln 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{e^2}{2}, \text{ car } \ln 1 = 0.$$

$$G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \ln x - \frac{e^2}{2}.$$

Barème : a) 1,5 point (0,5 pour la forme $\frac{u'}{u^2}$, 0,5 pour l'expression générale, 0,5 pour la constante) ; b) 1,5 point (0,5 pour chaque primitive des deux termes, 0,5 pour la constante).

Exercice 4 : Une primitive de $x e^x$ (4 points)

a. φ est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = a e^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x. \text{ C'est le résultat demandé.}$$

b. On veut $\varphi'(x) = x e^x$ pour tout x , c'est-à-dire $ax + a + b = x$. Par identification :
 $a = 1$ et $a + b = 0$, donc $b = -1$.

Une primitive de $x \rightarrow x e^x$ est $x \rightarrow (x - 1)e^x$.

$$\text{Vérification : } ((x - 1)e^x)' = e^x + (x - 1)e^x = x e^x.$$

c. On veut $ax + a + b = 2x + 5$: $a = 2$ et $a + b = 5$, donc $b = 3$.

Une primitive est $x \rightarrow (2x + 3)e^x$.

d. Soit $\psi(x) = (ax + b)e^{-x}$. $\psi'(x) = a e^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}$.

On veut $-ax + a - b = x + 1$: $-a = 1$ donc $a = -1$, et $a - b = 1$ donc
 $b = a - 1 = -2$.

Une primitive est $x \rightarrow (-x - 2)e^{-x}$.

$$\text{Vérification : } -e^{-x} - (-x - 2)e^{-x} = (-1 + x + 2)e^{-x} = (x + 1)e^{-x}.$$

Erreur fréquente : dans d), oublier que la dérivée de e^{-x} est $-e^{-x}$, ce qui change tous les signes.

Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point pour l'identification, 0,5 point pour la primitive ; c) 1 point ; d) 0,5 point pour la dérivée de ψ , 0,5 point pour les coefficients.

Exercice 5 : L'altitude d'un drone (4 points)

- a. Une primitive de $e^{-0,5t}$ est $\frac{1}{-0,5}e^{-0,5t} = -2e^{-0,5t}$. Donc une primitive de $-4e^{-0,5t}$ est $8e^{-0,5t}$, et :

$$z(t) = 4t + 8e^{-0,5t} + C, \quad C \text{ réel.}$$

$$z(0) = 0 \Leftrightarrow 0 + 8e^0 + C = 0 \Leftrightarrow C = -8.$$

$$z(t) = 4t + 8e^{-0,5t} - 8.$$

- b. $z(2) = 4 \times 2 + 8e^{-1} - 8 = 8e^{-1}$.

Au bout de 2 secondes, le drone est à $8e^{-1} = \frac{8}{e}$ mètres d'altitude (environ 2,9 m).

- c. Pour $t \geq 0$, $-0,5t \leq 0$ donc $e^{-0,5t} \leq 1$ et $v(t) = 4 - 4e^{-0,5t} \geq 0$. Comme $z' = v$, z **est croissante sur $[0 ; +\infty[$: l'altitude augmente.**

- d. Sur la figure, la courbe se rapproche de la droite d'équation $y = 4$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,5t) = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0, \text{ donc par composée}$$
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t} = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 4.$$

La vitesse du drone se stabilise vers 4 m/s : c'est sa vitesse limite de montée.

Barème : a) 1,5 point (0,5 pour la primitive de $e^{-0,5t}$, 0,5 pour l'expression générale, 0,5 pour la constante) ; b) 1 point (0,5 pour le calcul, 0,5 pour la valeur exacte avec l'unité) ; c) 0,5 point ; d) 1 point (0,5 pour la limite justifiée, 0,5 pour l'interprétation).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : primitives de fonctions usuelles

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « [Les équations différentielles](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [les équations différentielles](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale](#) classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : équations différentielles \$y' = ay + b\$](#)