

Corrigé du contrôle de maths Terminale : orthogonalité et distances dans l'espace

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Produit scalaire et angle	4 points
Exercice 2 : Vecteur normal et équations de plans	4 points
Exercice 3 : Projeté orthogonal sur un plan	4,5 points
Exercice 4 : Un tétraèdre dans un repère	7,5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Produit scalaire et angle (4 points)

a. Dans un repère orthonormé, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 2 \times 4 = 2 - 1 + 8 = 9$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$.

b. On calcule d'abord $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ et
 $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$|\vec{u}| = 3$ et $|\vec{v}| = 3\sqrt{2}$.

c. On sait que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times \cos\theta$, où θ est l'angle géométrique des deux vecteurs. Donc :

$$\cos\theta = \frac{9}{3 \times 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Enfin, puisque $\theta \in [0^\circ; 180^\circ]$, $\theta = 45^\circ$.

- d. $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2m - (m + 1) + 2 \times 3 = m + 5$. Or les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, soit $m + 5 = 0$. **Donc** $m = -5$, et alors $\vec{w}(-5; -4; 3)$.
Vérification : $-10 + 4 + 6 = 0$.

Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 point par norme ; c) 1 point : 0,5 point pour la formule et le cosinus, 0,5 point pour l'angle ; d) 1 point : 0,5 point pour le produit scalaire en fonction de m , 0,5 point pour la valeur de m .

Exercice 2 : Vecteur normal et équations de plans (4 points)

- a. Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
Ici : $2x - y + 3z + d = 0$.

Or A appartient au plan : $2 \times 1 - 2 + 3 \times (-1) + d = 0$, soit $-3 + d = 0$, donc $d = 3$.

$$P : 2x - y + 3z + 3 = 0.$$

- b. On a $2 \times 0 - 3 + 3 \times 0 + 3 = 0$: **donc** B appartient au plan P .

- c. Un vecteur normal de Q est $\vec{n'}(1; 5; 1)$.
 $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 2 \times 1 + (-1) \times 5 + 3 \times 1 = 2 - 5 + 3 = 0$.

Or deux plans dont les vecteurs normaux sont orthogonaux sont perpendiculaires : **ainsi, P et Q sont perpendiculaires.**

- d. Un plan parallèle à P admet $\vec{n}$ comme vecteur normal : son équation est donc $2x - y + 3z + d = 0$. Ensuite, avec $C(1; 0; 1)$: $2 - 0 + 3 + d = 0$, donc $d = -5$.

$$P' : 2x - y + 3z - 5 = 0.$$

- e. Un vecteur normal de R est $(-4; 2; -6)$, égal à $-2\vec{n}$. Ainsi, les vecteurs normaux sont

colinéaires, donc P et R sont parallèles. De plus, le point A de P donne $-4 \times 1 + 2 \times 2 - 6 \times (-1) + 7 = 13 \neq 0$. Alors A n'est pas dans R , donc les plans sont strictement parallèles, pas confondus.

Erreur fréquente : conclure que R est confondu avec P parce que ses coefficients sont proportionnels. En effet, il faut aussi comparer les constantes : $-2 \times 3 = -6$, pas 7 .

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la forme de l'équation, 0,5 point pour d ; b) 0,5 point ; c) 1 point : 0,5 point pour le produit scalaire nul, 0,5 point pour la conclusion justifiée ; d) 1 point ; e) 0,5 point : 0,25 point pour le parallélisme, 0,25 point pour le point testé.

Exercice 3 : Projeté orthogonal sur un plan (4,5 points)

- a. Un vecteur normal de P est $\vec{n}(1;2;2)$. Ainsi, la droite Δ , orthogonale à P , est dirigée par $\vec{n}$ et passe par M :

$$\Delta : x = 2 + t, \quad y = -2 + 2t, \quad z = 1 + 2t, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

- b. H est le point d'intersection de Δ et de P . On remplace donc dans l'équation du plan :

$$(2 + t) + 2(-2 + 2t) + 2(1 + 2t) - 9 = 0$$

$$2 + t - 4 + 4t + 2 + 4t - 9 = 0$$

$$9t - 9 = 0, \text{ donc } t = 1.$$

$$H(3;0;3). \text{ Vérification : } 3 + 0 + 6 - 9 = 0.$$

- c. La distance de M au plan P est MH . Or $\overrightarrow{MH}(1;2;2)$, donc

$$MH = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3. \text{ La distance de } M \text{ au plan } P \text{ est égale à } 3.$$

- d. H est le milieu de $[MM']$, donc $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$, de coordonnées $(2;4;4)$.

$$M'(4;2;5). \text{ Vérification : le milieu de } [MM'] \text{ est } \left(\frac{2+4}{2}; \frac{-2+2}{2}; \frac{1+5}{2}\right) = (3;0;3).$$

- e. La droite (MH) est orthogonale au plan P , donc à la droite (HN) contenue dans ce plan. Ainsi, le triangle MHN est rectangle en H . D'après le théorème de Pythagore, $MN^2 = MH^2 + HN^2$. De plus, $HN > 0$ car $N \neq H$. Donc $MN^2 > MH^2$, soit $MN > MH$: H est le point du plan le plus proche de M .

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour le vecteur directeur, 0,5 point pour la représentation ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la substitution, 0,5 point pour t , 0,5 point pour H ; c) 0,5 point ; d) 1 point ; e) 0,5 point.

Exercice 4 : Un tétraèdre dans un repère (7,5 points)

- a. $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;0;6)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, car la troisième coordonnée de $\overrightarrow{AB}$ est nulle, mais pas celle de $\overrightarrow{AC}$. Ils dirigent donc le plan (ABC) .

$$\text{Ensuite, } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-3) + 1 \times 6 + 1 \times 0 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-3) + 1 \times 0 + 1 \times 6 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) .

- b. L'équation est donc de la forme $2x + y + z + d = 0$. Puis, avec $A(3;0;0)$: $6 + d = 0$, donc $d = -6$.

$$(ABC) : 2x + y + z - 6 = 0. \text{ Vérification : } B \text{ donne } 6 - 6 = 0 \text{ et } C \text{ donne } 6 - 6 = 0.$$

- c. La droite d passe par O et est dirigée par $\vec{n}$: $x = 2t$, $y = t$, $z = t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Or le projeté orthogonal de O est l'intersection de d et du plan : $2 \times 2t + t + t - 6 = 0$, soit $6t = 6$, donc $t = 1$. Le point obtenu a alors pour coordonnées $(2;1;1)$: c'est bien H .

Volume du tétraèdre et aire du triangle ABC

d. On a $\vec{OH}(2;1;1)$, donc $OH = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \approx 2,45$.

e. On prend d'abord pour base le triangle OAB , situé dans le plan (xOy) et rectangle en O :
 $S = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{3 \times 6}{2} = 9$. La hauteur associée est $OC = 6$, car l'axe des cotes est orthogonal au plan (xOy) .

Donc $V = \frac{1}{3} \times 9 \times 6 = 18$. **Le volume du tétraèdre est 18 unités de volume.**

f. Cependant, avec la base ABC , la hauteur issue de O est $OH = \sqrt{6}$. Donc
 $18 = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times \sqrt{6}$, d'où :

$$S_{ABC} = \frac{54}{\sqrt{6}} = \frac{54\sqrt{6}}{6} = 9\sqrt{6}.$$

L'aire du triangle ABC vaut $9\sqrt{6} \approx 22,0$ unités d'aire.

g. D'abord, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-3) \times (-3) + 6 \times 0 + 0 \times 6 = 9$.

Ensuite, $AB = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$.

Alors $\cos \widehat{BAC} = \frac{9}{3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9 \text{ et } \widehat{BAC} \approx 78,5^\circ.$$

Contrôle : on a $\sin \widehat{BAC} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ et
 $\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \times 45 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 9\sqrt{6}$: on retrouve l'aire de la question f.

Erreur fréquente : prendre OA , OB ou OC comme hauteur relative à la base ABC . En effet, la hauteur issue de O est la distance de O au plan (ABC) , c'est-à-dire OH .

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour les deux vecteurs non colinéaires, 1 point pour les deux produits scalaires nuls ; b) 1 point ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la représentation paramétrique, 1 point pour le calcul de t et la conclusion ; d) 0,5 point ; e) 1 point : 0,5 point pour l'aire de base, 0,5 point pour le volume ; f) 1 point ; g) 1 point : 0,5 point pour le produit scalaire, 0,5 point pour l'angle.

Après le corrigé du contrôle : orthogonalité et distances dans l'espace

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « [Géométrie dans l'espace](#) » en Terminale et « [Représentation paramétrique et équation cartésienne](#) » en Terminale et « [Le produit scalaire](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [représentations paramétriques et équations cartésiennes](#), [produit scalaire](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : vecteurs, droites et plans de l'espace](#)