

Corrigé du contrôle de maths Terminale : limites par croissances comparées

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Croissances comparées	5 points
Exercice 2 : Limites de fonctions composées	3 points
Exercice 3 : Comparaison et encadrement	4 points
Exercice 4 : Étude d'une fonction exponentielle	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Croissances comparées (5 points)

- a. D'après les croissances comparées, pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$. Ainsi, avec $n = 3$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$.
- b. D'abord, $x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$, inverse de $\frac{e^x}{x^2}$ qui tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.
- c. C'est en effet un résultat de croissances comparées du cours : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ (l'exponentielle l'emporte sur x , bien qu'on ait la forme « $-\infty \times 0$ »).
- d. Forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Alors, pour x réel, $e^x - x^2 = e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right)$. D'après b),

$\frac{x^2}{e^x}$ tend vers 0, donc la parenthèse tend vers 1. Puis, comme $e^x \rightarrow +\infty$, par produit,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) = +\infty$.

e. On factorise d'abord le numérateur et le dénominateur par e^x :

$$\frac{3e^x + x}{e^x + x^2} = \frac{e^x \left(3 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{x^2}{e^x}\right)} = \frac{3 + \frac{x}{e^x}}{1 + \frac{x^2}{e^x}}.$$

Par croissances comparées, $\frac{x}{e^x}$ et $\frac{x^2}{e^x}$ tendent vers 0 en $+\infty$. Donc, par quotient, **la limite vaut** $\frac{3+0}{1+0} = 3$.

Erreur fréquente : en e), factoriser par x^2 comme pour une fonction rationnelle. Au contraire, il faut factoriser par le terme qui l'emporte, ici e^x .

Barème : 1 point par limite, dont 0,5 point pour la justification (propriété de croissances comparées citée ou factorisation) et 0,5 point pour le résultat.

Exercice 2 : Limites de fonctions composées (3 points)

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 1) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$. Ainsi, par composition,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2 + 1} = 0$.

b. Pour $x > 0$, $\frac{4x+1}{x+2} = \frac{4 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$, qui tend vers 4 en $+\infty$. Ensuite, $\lim_{X \rightarrow 4} \sqrt{X} = \sqrt{4} = 2$.
 . Donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x+2}} = 2$.

c. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$
 : **$e^{\frac{1}{x}}$ tend vers $+\infty$** .

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$, et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$:

$e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 0.

Barème : a) 0,5 point pour la limite intérieure, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour la limite du quotient, 0,5 point pour la composition par la racine ; c) 0,5 point par côté.

Exercice 3 : Comparaison et encadrement (4 points)

a. Pour tout réel x , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Puis, en ajoutant x : $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

En $+\infty$: $f(x) \geq x - 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$. Alors, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

En $-\infty$: $f(x) \leq x + 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$. De même, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

b. Pour $x > 0$, $g(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{x}$. Comme $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $x > 0$:

$$1 - \frac{1}{x} \leq g(x) \leq 1 + \frac{1}{x}.$$

Les fonctions $x \rightarrow 1 - \frac{1}{x}$ et $x \rightarrow 1 + \frac{1}{x}$ tendent toutes deux vers 1 en $+\infty$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

c. Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $-e^{-x} \leq h(x) \leq e^{-x}$. Or les deux fonctions qui encadrent tendent vers 0 en $+\infty$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

Erreur fréquente : dire que $\sin(x)$ « tend vers une valeur entre -1 et 1 » : en effet, la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$, d'où la nécessité d'un encadrement.

Barème : a) 0,5 point pour l'encadrement, 0,75 point par limite avec le théorème cité ; b) 0,75 point pour

l'encadrement, 0,75 point pour la conclusion avec les gendarmes ; c) 0,5 point.

Exercice 4 : Étude d'une fonction exponentielle (8 points)

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$. Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

b. En $+\infty$, on a la forme indéterminée « $+\infty \times 0$ ». On développe alors :

$$f(x) = 2xe^{-x} - e^{-x} = 2 \times \frac{x}{e^x} - e^{-x}.$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Ainsi, l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

c. $xf(x) = (2x^2 - x)e^{-x} = 2 \times \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x}$. Par croissances comparées, les deux quotients tendent vers 0 en $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$.

d. **Question d : dérivée et variations de f**

$f = uv$ avec $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$. Donc :

$$f'(x) = 2e^{-x} + (2x - 1)(-e^{-x}) = (2 - 2x + 1)e^{-x} = (3 - 2x)e^{-x}.$$

Or $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $3 - 2x$: positif si $x < \frac{3}{2}$, nul en $\frac{3}{2}$, négatif si $x > \frac{3}{2}$.

Enfin, $f\left(\frac{3}{2}\right) = (3 - 1)e^{-\frac{3}{2}} = 2e^{-\frac{3}{2}}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	-	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$2e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	0

Le maximum de f vaut $2e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,45$, atteint en $x = \frac{3}{2}$.

e. De plus, $e^{-x} > 0$, donc $f(x)$ a le signe de $2x - 1$: $f(x) < 0$ si $x < \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $f(x) > 0$ si $x > \frac{1}{2}$.

$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de l'axe des abscisses sur $] -\infty ; \frac{1}{2} [$, le coupe au point $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et est au-dessus sur $] \frac{1}{2}; +\infty [$. C'est donc cohérent avec la figure : la courbe coupe l'axe en 0,5, culmine vers 0,45 en 1,5 puis se rapproche de l'axe par au-dessus.

Erreur fréquente : en b), conclure « $+\infty \times 0 = 0$ » sans transformation. En effet, c'est une forme indéterminée, levée ici grâce aux croissances comparées.

Barème : a) 0,5 point pour les limites des facteurs, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour la transformation, 1 point pour la limite justifiée, 0,5 point pour l'asymptote ; c) 1 point ; d) 1 point pour la dérivée, 0,5 point pour le signe, 0,5 point pour le tableau avec les limites, 0,5 point pour le maximum exact et approché ; e) 0,75 point pour le signe, 0,75 point pour la position et la cohérence avec la figure.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : limites par croissances comparées

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « [Les limites et les asymptotes](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [limite de fonctions](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : limites de fonctions et asymptotes](#)