

Corrigé du contrôle de maths Terminale : limites de suites et convergence

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Limites par opérations	5 points
Exercice 2 : Comparaison et gendarmes	4 points
Exercice 3 : Convergence monotone	4 points
Exercice 4 : Les abonnés d'une lettre d'information	7 points
Total	20 points

Exercice 1 : Limites par opérations (5 points)

a. On a une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». On factorise par le terme dominant : pour $n \geq 1$, $u_n = n^2 \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 3$.
Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b. Forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $n \geq 1$, $v_n = \frac{n(2 + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{3}{n})} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$. Le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 1, donc par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$.

c. Comme $-1 < 0,8 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$. Par produit et somme,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 5 - 2 \times 0 = 5$.

- d. 2^n et 5^n tendent vers $+\infty$ (car $2 > 1$ et $5 > 1$) : forme indéterminée. On factorise :
 $t_n = 5^n \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n - 1 \right)$. Comme $0 < \frac{2}{5} < 1$, $\left(\frac{2}{5} \right)^n$ tend vers 0, donc la parenthèse tend vers -1 . Par produit avec $5^n \rightarrow +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$.
- e. S_n est la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$:

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$.

Erreur fréquente : en d), conclure « $+\infty - \infty = 0$ ». C'est une forme indéterminée : il faut factoriser par le terme qui l'emporte, ici 5^n .

Barème : 1 point par limite, dont 0,5 point pour la justification (factorisation, limite de q^n ou formule de la somme géométrique) et 0,5 point pour le résultat.

Exercice 2 : Comparaison et gendarmes (4 points)

- a. Pour tout n , $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, donc $2n - 1 \leq 2n + \cos(n) \leq 2n + 1$. En divisant par $n + 1 > 0$:

$$\frac{2n - 1}{n + 1} \leq a_n \leq \frac{2n + 1}{n + 1}.$$

Pour $n \geq 1$, $\frac{2n - 1}{n + 1} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$ et $\frac{2n + 1}{n + 1} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$: ces deux suites tendent vers 2. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$.

b. Pour tout n , $(-1)^n \geq -1$, donc $b_n \geq n^2 - 3$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 3) = +\infty$.
D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

c. Pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc, en divisant par $n^2 > 0$:

$$\frac{n-1}{n^2} \leq c_n \leq \frac{n+1}{n^2}, \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq c_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Les deux suites qui encadrent tendent vers $0 - 0 = 0$ et $0 + 0 = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$.

Barème : a) 0,75 point pour l'encadrement, 0,25 point pour les limites des deux suites, 0,5 point pour le théorème cité et la conclusion ; b) 0,5 point pour la minoration, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,75 point pour l'encadrement, 0,75 point pour les limites et le théorème des gendarmes.

Exercice 3 : Convergence monotone (4 points)

a. $u_1 = f(2) = \frac{4+4}{5} = 1,6$ et $u_2 = f(1,6) = \frac{2,56+4}{5} = \frac{6,56}{5} = 1,312$. Sur la figure, les termes se déplacent vers la gauche et s'accumulent vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite, qui vaut 1. **On conjecture que (u_n) est décroissante et converge vers 1.**

b. Pour tout entier naturel n , on note $P(n) : \ll 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2 \gg$.

Initialisation : $u_1 = 1,6$ et $u_0 = 2$, et $1 \leq 1,6 \leq 2 \leq 2$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit n un entier naturel tel que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$. Ces nombres sont dans $[0; +\infty[$, où f est croissante, donc $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(2)$.

Or $f(1) = \frac{1+4}{5} = 1$ et $f(2) = 1,6$, donc $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1,6 \leq 2$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence, **pour tout entier naturel** n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.

c. D'après b), la suite (u_n) est décroissante ($u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, **la suite** (u_n) **converge**.

d. $f(\ell) = \ell$ équivaut à $\ell^2 + 4 = 5\ell$, soit $\ell^2 - 5\ell + 4 = 0$, c'est-à-dire $(\ell - 1)(\ell - 4) = 0$. Donc $\ell = 1$ ou $\ell = 4$. Or, pour tout n , $1 \leq u_n \leq 2$, donc par passage à la limite $1 \leq \ell \leq 2$, ce qui exclut 4. **La suite** (u_n) **converge vers** $\ell = 1$.

Erreur fréquente : en c), dire que la suite converge vers 1 parce qu'elle est minorée par 1. Le théorème de convergence monotone donne l'existence de la limite, pas sa valeur : un minorant n'est pas forcément la limite.

Barème : a) 0,5 point pour les deux termes, 0,5 point pour la conjecture ; b) 0,25 point pour l'initialisation, 1 point pour l'hérédité, 0,25 point pour la conclusion ; c) 0,5 point avec le théorème cité ; d) 0,5 point pour la résolution de l'équation, 0,5 point pour le choix justifié de 1.

Exercice 4 : Les abonnés d'une lettre d'information (7 points)

a. $u_1 = 0,9 \times 2\,000 + 300 = 1\,800 + 300 = 2\,100$ et
 $u_2 = 0,9 \times 2\,100 + 300 = 1\,890 + 300 = 2\,190$. $u_1 = 2\,100$ **et** $u_2 = 2\,190$.

b. Perdre 10 % des abonnés revient à multiplier leur nombre par $1 - \frac{10}{100} = 0,9$, puis on ajoute les 300 nouveaux abonnés. **Donc** $u_{n+1} = 0,9u_n + 300$.

c. Pour tout n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3\,000 = 0,9u_n + 300 - 3\,000 = 0,9u_n - 2\,700 = 0,9(u_n - 3\,000) = 0,9v_n.$$

La suite (v_n) **est géométrique de raison** $0,9$ **et de premier terme**
 $v_0 = 2\,000 - 3\,000 = -1\,000$.

- d. On en déduit $v_n = v_0 \times 0,9^n = -1\,000 \times 0,9^n$, puis $u_n = v_n + 3\,000$. **Pour tout entier naturel n , $u_n = 3\,000 - 1\,000 \times 0,9^n$.**
- e. Comme $-1 < 0,9 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3\,000$. À long terme, le nombre d'abonnés se stabilise autour de 3 000 (sans jamais l'atteindre, car $1\,000 \times 0,9^n > 0$).
- f. On répète le calcul du terme suivant tant que le seuil n'est pas atteint :

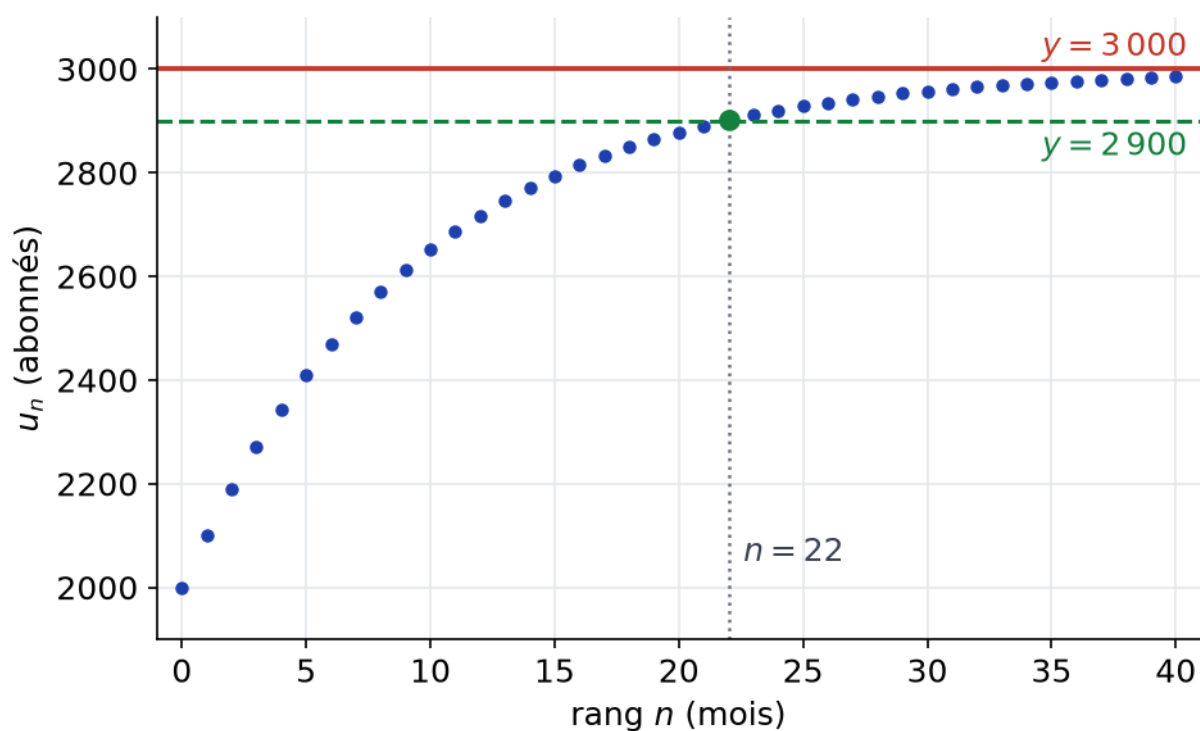
```
def seuil():
    u = 2000
    n = 0
    while u < 2900:
        u = 0.9*u + 300
        n = n + 1
    return n
```

- g. On cherche le plus petit n tel que $3\,000 - 1\,000 \times 0,9^n \geq 2\,900$, soit $0,9^n \leq 0,1$. À la calculatrice (tableau de valeurs) :

$$u_{21} = 3\,000 - 1\,000 \times 0,9^{21} \approx 2\,890,6 \text{ et}$$

$$u_{22} = 3\,000 - 1\,000 \times 0,9^{22} \approx 2\,901,5.$$

La suite (u_n) est croissante, car $0,9^n$ diminue quand n augmente : le seuil est franchi au rang 22 et ne l'est pas avant. **La fonction renvoie 22 : c'est 22 mois après janvier 2026, donc en novembre 2027, que l'association dépasse 2 900 abonnés.**



Erreur fréquente : en f), écrire la condition d'arrêt à la place de la condition de poursuite (`while u >= 2900`) : la boucle s'arrêterait immédiatement et renverrait 0.

Barème : a) 0,25 point par terme ; b) 0,5 point pour la traduction du pourcentage et de l'ajout ; c) 1 point pour le calcul de u_{n+1} , 0,5 point pour la raison et le premier terme ; d) 0,5 point pour u_n , 0,5 point pour u_n ; e) 0,5 point pour la limite justifiée, 0,5 point pour l'interprétation ; f) 0,5 point par ligne complétée ; g) 0,5 point pour les deux termes encadrant le seuil, 0,5 point pour la réponse et le mois.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : limites de suites et convergence

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours [« Le raisonnement par récurrence » en Terminale](#) et [« Les suites numériques » en Terminale](#) puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [la récurrence](#), [suites numériques](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : raisonnement par récurrence et suites](#)
- [Contrôle de maths Terminale : suites et fonction logarithme](#)