

Corrigé du contrôle de maths Terminale : limites de fonctions et asymptotes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Limites en l'infini	4 points
Exercice 2 : Limites en un réel	4 points
Exercice 3 : Lecture graphique et asymptotes	4 points
Exercice 4 : Étude d'une fonction rationnelle	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Limites en l'infini (4 points)

- a. Forme indéterminée en $+\infty$ (« $-\infty + \infty$ »). Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(-2 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^3} \right)$. Ainsi, la parenthèse tend vers -2 en $+\infty$ comme en $-\infty$.

En $+\infty$: $x^3 \rightarrow +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

En $-\infty$: $x^3 \rightarrow -\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

- b. Pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$. Le numérateur tend vers 3 et le

dénominateur vers 1, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$.

c. Pour $x \neq 0$ et $x \neq 3$, $h(x) = \frac{x^2(2 + \frac{1}{x^2})}{x(1 - \frac{3}{x})} = x \times \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}}$. En $-\infty$, le quotient tend vers $\frac{2}{1} = 2$ et $x \rightarrow -\infty$. Par produit, on obtient donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

d. Forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». On multiplie alors par l'expression conjuguée :

$$k(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

En $+\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$.

Barème : 1 point par question, dont 0,5 point pour la transformation qui lève l'indétermination (ou les limites des facteurs) et 0,5 point pour le résultat. En a), 0,5 point par limite.

Exercice 2 : Limites en un réel (4 points)

a. $\lim_{x \rightarrow 3} (x+4) = 7 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$. Si $x > 3$, $x-3 > 0$; si $x < 3$, $x-3 < 0$. Ainsi, par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 3, x > 3} p(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3, x < 3} p(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 3$ est donc asymptote verticale à la courbe de p .

b. Forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x \neq 2$, $q(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2} q(x) = 2+2 = 4$.

c. Forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » car $\sqrt{3+1}-2 = 0$. On multiplie alors par l'expression conjuguée du numérateur :

$$r(x) = \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}.$$

Quand x tend vers 3, $\sqrt{x+1}+2$ tend vers $2+2=4$. Donc $\lim_{x \rightarrow 3} r(x) = \frac{1}{4}$.

Erreur fréquente : en a), écrire « $\frac{7}{0} = +\infty$ » sans étudier le signe du dénominateur. En effet, la limite n'est pas la même des deux côtés.

Barème : a) 0,5 point par limite avec l'étude du signe, 0,5 point pour l'asymptote. b) 0,5 point pour la factorisation, 0,5 point pour le résultat. c) 1 point pour l'expression conjuguée et la simplification, 0,5 point pour le résultat.

Exercice 3 : Lecture graphique et asymptotes (4 points)

- a. La courbe se rapproche de la droite horizontale d'ordonnée 2 aux deux extrémités. De plus, elle part vers le bas à gauche de 1, puis vers le haut à droite de 1 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = +\infty.$$

- b. **La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$; la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale.**

- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x-1} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$. Comme cette limite vaut 2, on a alors $a = 2$. Ensuite, le point $A(0; -1)$ est sur la courbe : $f(0) = 2 + \frac{b}{-1} = 2 - b = -1$, donc $b = 3$.

Vérification : $f(4) = 2 + \frac{3}{4-1} = 2 + 1 = 3$, donc $B(4; 3)$ appartient bien à $\mathcal{C}_f$.
 $a = 2$ et $b = 3$: $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$.

Barème : a) 0,5 point par limite ; b) 0,5 point par asymptote ; c) 0,25 point pour a , 0,5 point pour b , 0,25 point pour la vérification avec B .

Exercice 4 : Étude d'une fonction rationnelle (8 points)

- a. $x^2 - 4 = 0$ équivaut à $x = 2$ ou $x = -2$, donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Cet ensemble est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de D ,

$$f(-x) = \frac{3(-x)^2 - 2}{(-x)^2 - 4} = \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 4} = f(x). \text{ La fonction } f \text{ est paire, donc } \mathcal{C}_f \text{ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.}$$

- b. Pour $x \neq 0$ de D , $f(x) = \frac{x^2(3 - \frac{2}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x^2})} = \frac{3 - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}$. Or, quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, $\frac{2}{x^2}$ et $\frac{4}{x^2}$ tendent vers 0.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$: la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

- c. Quand x tend vers 2 ou vers -2 , le numérateur tend vers $3 \times 4 - 2 = 10 > 0$ et le dénominateur tend vers 0. Le trinôme $x^2 - 4$ a pour racines -2 et 2 et un coefficient de x^2 positif. Il est donc strictement positif si $x < -2$ ou $x > 2$, strictement négatif si $-2 < x < 2$.

Question c : signe du dénominateur et asymptotes verticales

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $x^2 - 4$		+	0	-	0	+	

Ainsi, par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 2, x > 2} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 2, x < 2} f(x) = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2, x < -2} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -2, x > -2} f(x) = -\infty .$$

Les droites d'équations $x = 2$ et $x = -2$ sont donc asymptotes verticales à $\mathcal{C}_f$ (ce qui est cohérent avec la symétrie de la courbe).

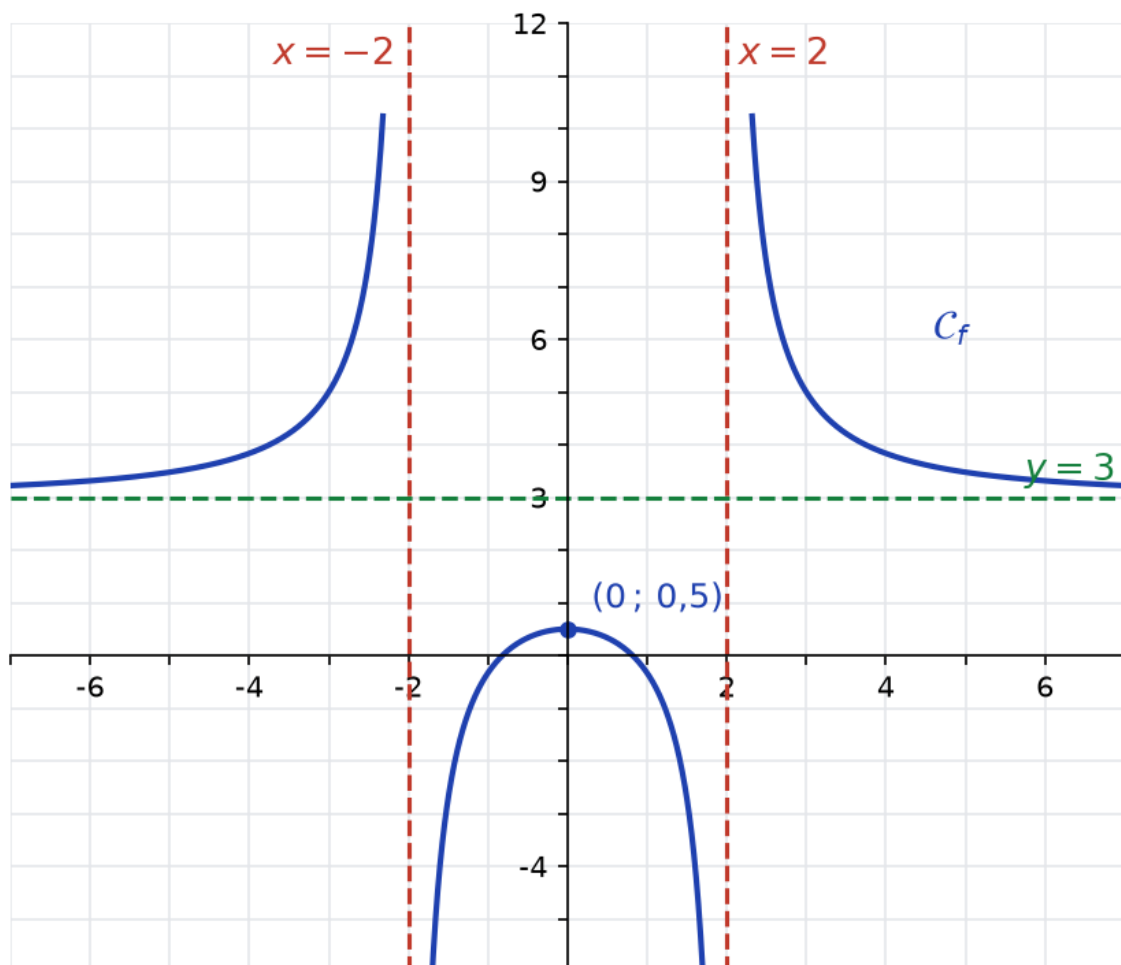
d. Pour tout x de D :
$$f(x) - 3 = \frac{3x^2 - 2 - 3(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \frac{3x^2 - 2 - 3x^2 + 12}{x^2 - 4} = \frac{10}{x^2 - 4} .$$

Le numérateur 10 est positif, donc $f(x) - 3$ a le signe de $x^2 - 4$ (tableau de c)).

Sur $] -\infty ; -2[$ et sur $] 2 ; +\infty [$, $f(x) - 3 > 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = 3$. Sur $] -2 ; 2[$, $f(x) - 3 < 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de cette droite.

Enfin, la courbe ne coupe jamais l'asymptote, car $\frac{10}{x^2 - 4}$ ne s'annule pas.

e. $f(0) = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$, donc $f(0) = 0,5$. Allure de la courbe :



Erreur fréquente : en c), oublier que la limite en -2 par valeurs inférieures correspond à $x < -2$, où $x^2 - 4$ est positif. Ainsi, les signes ne sont pas les mêmes qu'en 2 du même côté.

Barème : a) 0,5 point pour D , 0,5 point pour la parité et la symétrie. b) 1 point pour la limite justifiée, 0,5 point pour l'asymptote. c) 1 point pour le signe du dénominateur, 1 point pour les quatre limites (0,25 point chacune), 0,5 point pour les asymptotes. d) 1 point pour le calcul, 1 point pour la position relative. e) 0,25 point pour $f(0)$, 0,75 point pour une allure cohérente avec les limites et les asymptotes.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : limites de fonctions et asymptotes

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « [Les limites et les asymptotes](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [limite de fonctions](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : limites par croissances comparées](#)