

Corrigé du contrôle de maths Terminale : intégrales et intégration par parties

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Calculer des intégrales	5 points
Exercice 2 : Propriétés de l'intégrale	4 points
Exercice 3 : Intégrations par parties	5 points
Exercice 4 : Une suite d'intégrales	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Calculer des intégrales (5 points)

Si F est une primitive de f continue sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

a. D'abord, une primitive de $3x^2 - 2x + 1$ est $x^3 - x^2 + x$.

$$\text{Donc } A = [x^3 - x^2 + x]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0. \quad A = 6.$$

b. Sur $[1 ; e]$, une primitive de $\frac{2}{x}$ est $2\ln x$.

Ainsi, $B = [2\ln x]_1^e = 2\ln e - 2\ln 1 = 2 - 0$. $B = 2$.

c. Une primitive de e^{2x} est $\frac{1}{2}e^{2x}$.

Alors $C = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}e^{2\ln 2} - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{2}$, car $e^{2\ln 2} = (e^{\ln 2})^2 = 2^2 = 4$.
 $C = \frac{3}{2}$.

d. Une primitive de $\cos(2x)$ est $\frac{1}{2}\sin(2x)$.

Donc $D = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2} - 0$. $D = \frac{1}{2}$.

e. Avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$: $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, de primitive $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$.

Enfin, $E = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1$. $E = \frac{\ln 2}{2}$.

Barème : 1 point par intégrale (0,5 pour une primitive correcte, 0,5 pour la valeur exacte).

Exercice 2 : Propriétés de l'intégrale (4 points)

a. D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + (-5). \quad \int_0^3 f(x) dx = -3.$$

b. Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^3 (2f(x) - 3g(x))dx = 2\int_0^3 f(x) dx - 3\int_0^3 g(x) dx = 2 \times (-3) - 3 \times 4. \text{ Le résultat est donc } -18.$$

- c. La fonction $\ln$ est continue sur $[1 ; 2]$ et, pour $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$. De plus, les bornes sont dans le bon ordre ($1 \leq 2$).

Ainsi, par positivité de l'intégrale,
$$\int_1^2 \ln x \, dx \geq 0.$$

- d. Pour $x \in [0 ; 1]$, $x^2 \leq x$ (car $x^2 - x = x(x - 1) \leq 0$). Or $e^x > 0$, donc $x^2 e^x \leq x e^x$. De plus, les deux fonctions sont continues sur $[0 ; 1]$ et $0 \leq 1$.

Par croissance de l'intégrale,
$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx \leq \int_0^1 x e^x \, dx.$$

Erreur fréquente : dans b), écrire $2 \times (-3) + 3 \times 4 = 6$. En effet, le signe moins porte sur tout le terme $3g(x)$.

Barème : a) 1 point (0,5 pour la relation de Chasles citée, 0,5 pour le résultat) ; b) 1 point (0,5 pour la linéarité, 0,5 pour le résultat) ; c) 1 point (0,5 pour le signe de $\ln x$, 0,5 pour la propriété citée) ; d) 1 point (0,5 pour l'inégalité entre les fonctions, 0,5 pour la conclusion).

Exercice 3 : Intégrations par parties (5 points)

Formule : si u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[a ; b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

- a. D'abord, on pose $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$; alors $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$.

$$\text{Donc } I = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = (1 \times e - 0) - [e^x]_0^1 = e - (e - 1).$$

$$I = 1.$$

b. Ici, on pose $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$; alors $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

$$J = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 0 - \int_1^e \frac{x}{2} dx.$$

$$\text{Ensuite, } \int_1^e \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{4}.$$

$$\text{Ainsi, } J = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{2e^2 - e^2 + 1}{4}. \quad J = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

c. Enfin, on pose $u(x) = x$, $v'(x) = \sin x$; alors $u'(x) = 1$, $v(x) = -\cos x$.

$$K = [-x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx = (-\pi \cos \pi) - 0 + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0.$$

$$K = \pi.$$

Erreur fréquente : pour J , choisir $v'(x) = \ln x$. En effet, il faudrait connaître une primitive de $\ln x$, et l'intégrale obtenue serait plus compliquée. On dérive donc $\ln x$, qui devient $\frac{1}{x}$.

Barème : a) 2 points (0,5 pour le choix de u et v' , 1 pour la formule appliquée, 0,5 pour le résultat) ; b) 2 points (0,5 pour le choix, 1 pour les calculs, 0,5 pour le résultat simplifié) ; c) 1 point (0,5 pour la formule appliquée, 0,5 pour le résultat).

Exercice 4 : Une suite d'intégrales (6 points)

$$\text{a. } I_0 = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1. \quad I_0 = e - 1.$$

b. On pose $u(x) = x^{n+1}$, $v'(x) = e^x$; alors $u'(x) = (n+1)x^n$, $v(x) = e^x$. Ce sont

des fonctions dérivables à dérivées continues sur $[0 ; 1]$.

$$I_{n+1} = [x^{n+1}e^x]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x dx = (1 \times e - 0) - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx.$$

Donc $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

c. Avec $n = 0$: $I_1 = e - 1 \times I_0 = e - (e - 1)$, donc $I_1 = 1$ (on retrouve ainsi I de l'exercice 3).

Puis, avec $n = 1$: $I_2 = e - 2I_1 = e - 2$. $I_2 = e - 2$.

d. Pour $x \in [0 ; 1]$, $x^n \geq 0$ et $e^x > 0$, donc $x^n e^x \geq 0$. La fonction est continue et $0 \leq 1$: **par positivité de l'intégrale**, $I_n \geq 0$.

Questions e et f : sens de variation et limite

e. Sur $[0 ; 1]$, les courbes sont de plus en plus basses quand n augmente. On conjecture donc que **la suite (I_n) est décroissante**.

Par linéarité :
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)e^x dx = \int_0^1 x^n(x-1)e^x dx.$$

Or, pour $x \in [0 ; 1]$: $x^n \geq 0$, $x-1 \leq 0$ et $e^x > 0$, donc $x^n(x-1)e^x \leq 0$. Par positivité, $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

Ainsi, la suite (I_n) est décroissante.

f. Pour $x \in [0 ; 1]$, la fonction exponentielle étant croissante, $e^0 \leq e^x \leq e^1$, soit $1 \leq e^x \leq e$. Puis, en multipliant par $x^n \geq 0$: $x^n \leq x^n e^x \leq e x^n$.

Par croissance de l'intégrale :
$$\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx.$$
 De plus,

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Donc $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$. Alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point (0,5 pour le choix de u et v' , 0,5 pour le crochet, 0,5 pour la conclusion) ; c) 1 point (0,5 par valeur) ; d) 0,5 point ; e) 1 point (0,5 pour la conjecture et l'écriture de $I_{n+1} - I_n$, 0,5 pour le signe justifié) ; f) 1,5 point (1 pour l'encadrement, 0,5 pour la limite par les gendarmes).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : intégrales et intégration par parties

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours [« Calculs d'intégrales » en Terminale](#) puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [intégrales et primitives](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale](#) classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : aires et valeur moyenne d'une fonction](#)
- [Contrôle de maths Terminale : dérivation et calcul intégral](#)