Corrigé du contrôle de maths Terminale : fonctions sinus et cosinus

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Le cercle trigonométrique	4 points
Exercice 2 : Parité et périodicité	3 points
Exercice 3 : Dériver avec sin et cos	3 points
Exercice 4 : Limites et nombre dérivé	3 points
Exercice 5 : Équations trigonométriques	3 points
Exercice 6 : Étude d'une fonction trigonométrique	4 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Le cercle trigonométrique (4 points)

a. D'abord, on lit les coordonnées des points sur les axes. Ainsi, $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ est dans le premier quart de cercle, $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ dans le deuxième. De même, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ est dans le troisième et $D\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dans le quatrième.

Donc A est associé à $\frac{\pi}{6}$, B à $\frac{3\pi}{4}$, C à $\frac{7\pi}{6}$ et D à $\frac{5\pi}{3}$.

b. En effet, le cosinus est l'abscisse du point et le sinus son ordonnée. On lit donc :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

$\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ce sont donc les huit valeurs ci-dessus.

c. D'abord, deux réels qui diffèrent d'un multiple de 2π sont associés au même point. Ainsi :

$\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 4\pi$: **point** A .

$-\frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} - 2\pi$: **point** C .

$-\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} - 2\pi$: **point** D .

Barème : a) 1 point : 0,25 point par point ; b) 2 points : 0,25 point par valeur exacte ; c) 1 point : 0,5 point pour la justification par les multiples de 2π , 0,5 point pour les trois points.

Exercice 2 : Parité et périodicité (3 points)

a. D'abord, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Ensuite, pour tout réel x, la fonction cosinus étant paire :

$$f(-x) = \cos(-3x) - 2\cos(-x) = \cos(3x) - 2\cos x = f(x).$$

Donc la fonction f est paire.

b. Pour tout réel x : $f(x + 2\pi) = \cos(3x + 6\pi) - 2\cos(x + 2\pi)$. Or $6\pi = 3 \times 2\pi$ et cosinus est 2π -périodique. Ainsi, $\cos(3x + 6\pi) = \cos(3x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Par conséquent, $f(x + 2\pi) = f(x)$: f est périodique de période 2π .

c. Pour tout réel x, $g(-x) = (-x)^2\sin(-x) = x^2 \times (-\sin x) = -g(x)$. **Donc la fonction g est impaire.**

d. Comme f est 2π -périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi\,;\pi]$. On obtient ensuite toute la courbe par des **translations de vecteurs** $2k\pi\,\vec{i}$ (k entier). De plus, comme f est paire, sa courbe est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**. Ainsi, la partie sur $[-\pi\,;0]$ se déduit de celle sur $[0\,;\pi]$. **L'étude sur $[0\,;\pi]$ suffit donc.**

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour le calcul de $f(-x)$, 0,5 point pour la parité de cosinus citée et la conclusion ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point ; d) 1 point : 0,5 point pour la translation, 0,5 point pour la symétrie axiale.

Exercice 3 : Dériver avec sin et cos (3 points)

a. $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$, donc $f'(x) = 3\cos x - 2 \times (-\sin x)$. **Ainsi,** $f'(x) = 3\cos x + 2\sin x$.

b. $g = \cos u$ avec $u(x) = 2x - \frac{\pi}{3}$ et $u'(x) = 2$. Or $(\cos u)' = -u'\sin u$, donc : $g'(x) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

c. $h = uv$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \cos x$: $h'(x) = 1 \times \cos x + x \times (-\sin x)$. **Ainsi,** $h'(x) = \cos x - x\sin x$.

Erreur fréquente : oublier le facteur $u'(x) = 2$ au b) et écrire $-\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Barème : 1 point par dérivée : 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour le résultat.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 4 : Limites et nombre dérivé (3 points)

a. D'abord, la fonction sinus est dérivable en 0, avec $\sin 0 = 0$ et $\sin'(0) = \cos 0 = 1$. Or $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ est le taux d'accroissement de sinus entre 0 et x. Il tend donc vers le nombre dérivé en 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = 1.$$

b. Ici, on pose $u(x) = \sin(3x)$, dérivable avec $u(0) = 0$ et $u'(x) = 3\cos(3x)$, donc $u'(0) = 3$. Alors $\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{u(x) - u(0)}{x - 0}$ tend vers $u'(0)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3.$$ (On peut aussi écrire $\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}$ et utiliser a).)

c. $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0}$ est le taux d'accroissement de cosinus en 0. Il tend alors vers $\cos'(0) = -\sin 0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour le taux d'accroissement reconnu, 0,5 point pour la limite ; b) 1 point ; c) 1 point : 0,5 point pour la méthode, 0,5 point pour le résultat.

Exercice 5 : Équations trigonométriques (3 points)

a. On sait que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Ainsi, les points du cercle d'abscisse $\frac{1}{2}$ sont associés à $\frac{\pi}{3}$ et à $-\frac{\pi}{3}$. Cela donne $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ dans $[0\,;2\pi[$.

$$S = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\frac{5\pi}{3}\right\}.$$

b. $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ensuite, les points d'ordonnée $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont associés à $-\frac{\pi}{4}$ et à $\pi + \frac{\pi}{4}$. Dans $[0\,;2\pi[$: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$.

$S = \left\{\frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\right\}$.

c. D'abord, on pose $X = \sin x$: $2X^2 - X - 1 = 0$. $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc $X = \frac{1+3}{4} = 1$ ou $X = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$.

Puis $\sin x = 1$ donne $x = \frac{\pi}{2}$; enfin, $\sin x = -\frac{1}{2}$ donne $x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$.

$S = \left\{\frac{\pi}{2} ; \frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right\}$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point par solution ; b) 1 point : 0,5 point par solution ; c) 1 point : 0,5 point pour les valeurs de X, 0,5 point pour les trois solutions.

Exercice 6 : Étude d'une fonction trigonométrique (4 points)

a. D'abord, la dérivée de $\cos(2x)$ est $-2\sin(2x)$ et celle de $2\cos x$ est $-2\sin x$. Donc :

$f'(x) = -2\sin(2x) - 2\sin x = -2 \times 2\sin x\cos x - 2\sin x = -4\sin x\cos x - 2\sin x$.

Enfin, en factorisant par $-2\sin x$: $f'(x) = -2\sin x(2\cos x + 1)$.

b. Sur $[0 ; \pi]$, $\sin x \geq 0$, avec égalité seulement en 0 et en π. Donc $-2\sin x \leq 0$.

$2\cos x + 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2}$. Or, sur $[0 ; \pi]$, cosinus est décroissante et $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Ainsi, $2\cos x + 1 > 0$ sur $\left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right[$ et $2\cos x + 1 < 0$ sur $\left]\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$.

Donc $f'(x) < 0$ sur $\left]0 ; \frac{2\pi}{3}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{2\pi}{3} ; \pi\right[$.

Enfin, $f(0) = 1 + 2 = 3$; $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + 2\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$; $f(\pi) = \cos(2\pi) + 2\cos\pi = 1 - 2 = -1$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
signe de $f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

variations de f	3	décroissante	$-\frac{3}{2}$	croissante	-1

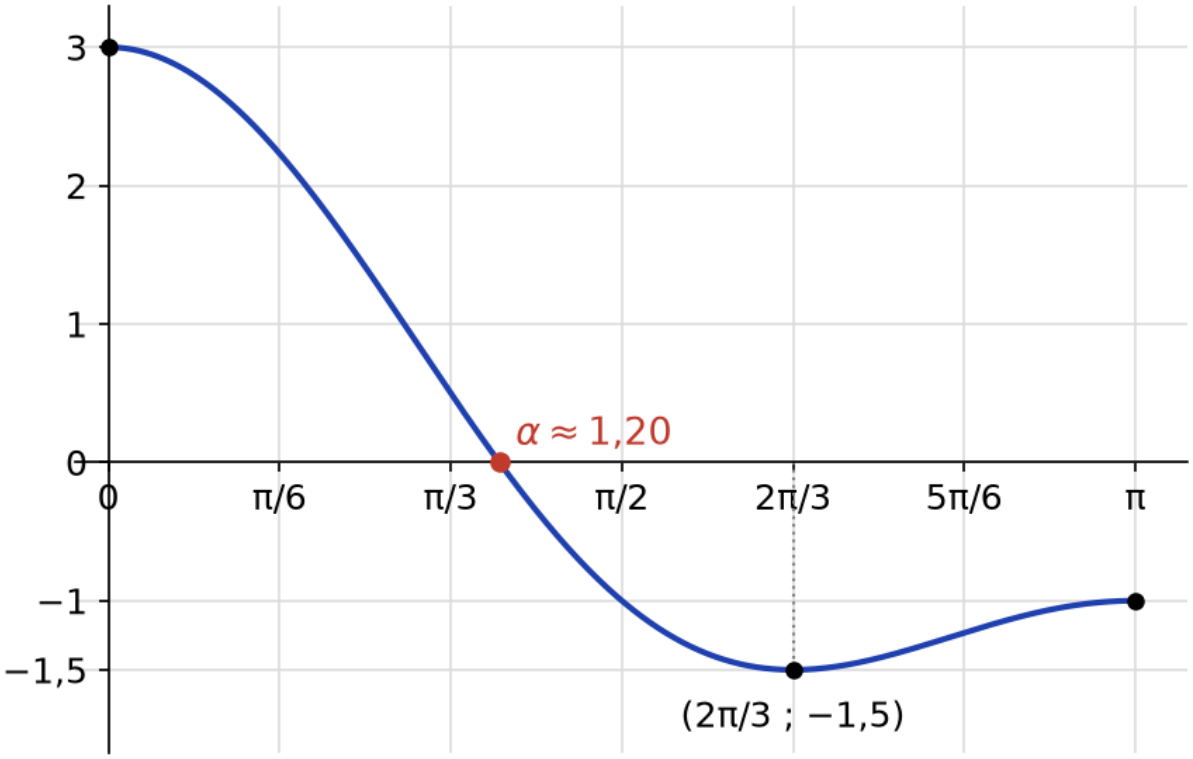
Donc f est décroissante sur $\left[0\,;\frac{2\pi}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$, de minimum $-\frac{3}{2}$.

c. Sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$, f est croissante et $f(x) \leq f(\pi) = -1 < 0$. Par conséquent, l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.

Ensuite, sur $\left[0\,;\frac{2\pi}{3}\right]$, f est continue et strictement décroissante. De plus, $f(0) = 3 > 0$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} < 0$. Alors, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\pi]$.

Enfin, à la calculatrice : $f(1{,}19) \approx 0{,}020 > 0$ et $f(1{,}20) \approx -0{,}013 < 0$.
$1{,}19 < \alpha < 1{,}20$.



Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour la factorisation ; b) 1,5 point : 0,5 point pour le signe de $2\cos x + 1$, 0,5 point pour le tableau, 0,5 point pour les valeurs exactes ; c) 1,5 point : 0,5

point pour l'intervalle sans solution, 0,5 point pour le corollaire du TVI rédigé, 0,5 point pour l'encadrement.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : fonctions sinus et cosinus

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « Fonctions sinus et cosinus » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** les fonctions sinus et cosinus.

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP à la Terminale.

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- Contrôle de maths Terminale : étude d'une fonction trigonométrique

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.