

Corrigé du contrôle de maths Terminale : étude de fonctions avec logarithme

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Dérivées avec $\ln$	4 points
Exercice 2 : Croissances comparées	2 points
Exercice 3 : Étude de la fonction $x - 2 \ln x$	7 points
Exercice 4 : Convexité et inégalité	3 points
Exercice 5 : La fonction $\ln x$ sur x	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Dérivées avec $\ln$ (4 points)

a. D'abord, $x \ln x$ est un produit uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$: sa dérivée est $1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

Donc $f'(x) = \ln x + 1 - 1$. $f'(x) = \ln x$.

b. Ici, $g = \ln u$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$ et $u'(x) = 2x$. Puisque $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$:
 $g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

c. Ensuite, $h = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln x$, $v(x) = x$:

Ainsi, $h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2}$. $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

d. Enfin, $k = \ln u$ avec $u(x) = 3x - 6 > 0$ sur $]2; +\infty[$ et $u'(x) = 3$:

Donc $k'(x) = \frac{3}{3x-6} = \frac{3}{3(x-2)}$. $k'(x) = \frac{1}{x-2}$.

Barème : 1 point par dérivée : 0,5 point pour la formule utilisée, 0,5 point pour le résultat simplifié.

Exercice 2 : Croissances comparées (2 points)

a. On écrit $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Par produit,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$.

b. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, donc par somme
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + 3) = 3$.

c. On a une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». Alors, pour $x > 0$: $x^2 - \ln x = x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right)$.
 D'après a), la parenthèse tend vers 1, et x^2 tend vers $+\infty$. **Donc**
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x) = +\infty$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour l'écriture en produit, 0,5 point pour la limite ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point.

Exercice 3 : Étude de la fonction $x - 2 \ln x$ (7 points)

a. D'abord, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-2 \ln x) = +\infty$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \text{ Par somme, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Ainsi, graphiquement, **la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à C_f .**

b. En $+\infty$, on a la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». Or, pour $x > 0$, $f(x) = x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right)$.
Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc la parenthèse tend vers 1. Par produit,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$.

Or, sur $]0; +\infty[$, $x > 0$. Donc $f'(x)$ a le signe de $x - 2$: négatif sur $]0; 2[$, nul en 2, positif sur $]2; +\infty[$.

Enfin, $f(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0,61$.

x	0		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0	+	
variations de f	$+\infty$	décroissante	$2 - 2\ln 2$	croissante	$+\infty$

Ainsi, f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$, après avoir été strictement décroissante sur $]0; 2]$. Son minimum vaut $2 - 2\ln 2$, atteint en $x = 2$.

Solutions de $f(x) = 3$ et tangente

d. Sur $]0; 2]$: f est continue et strictement décroissante, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(2) \approx 0,61 < 3$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α dans $]0; 2[$.

Ensuite, sur $[2; +\infty[$: f est continue et strictement croissante, $f(2) < 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De même, l'équation admet une unique solution β dans $]2; +\infty[$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions α et β , avec $\alpha < 2 < \beta$.

Puis, à la calculatrice : $f(6,8) \approx 2,97 < 3$ et $f(6,9) \approx 3,04 > 3$. $6,8 < \beta < 6,9$. (De

même, $0,25 < \alpha < 0,26$.)

e. On calcule d'abord $f(1) = 1 - 2\ln 1 = 1$ et $f'(1) = \frac{1-2}{1} = -1$.

Ainsi, $T : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -(x - 1) + 1$. $T : y = -x + 2$.

Erreur fréquente : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur tout $]0; +\infty[$ d'un seul coup. En effet, la fonction n'y est pas monotone : il faut donc découper l'intervalle au minimum, en $x = 2$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la limite, 0,5 point pour l'asymptote ; b) 1 point ; c) 2 points : 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour le signe, 0,5 point pour le tableau, 0,5 point pour le minimum exact ; d) 2 points : 0,75 point par intervalle (continuité, stricte monotonie, valeurs), 0,5 point pour l'encadrement de β ; e) 1 point.

Exercice 4 : Convexité et inégalité (3 points)

a. On a $f'(x) = 1 - \frac{2}{x}$, donc $f''(x) = \frac{2}{x^2}$.

Pour tout $x > 0$, $f''(x) > 0$. **Ainsi, la fonction f est convexe sur $]0; +\infty[$.**

b. Or une fonction convexe a sa courbe au-dessus de chacune de ses tangentes : **donc C_f est au-dessus de T sur $]0; +\infty[$.**

Alors, pour tout $x > 0$: $x - 2\ln x \geq -x + 2$, soit $2x - 2 \geq 2\ln x$, puis, en divisant par 2 : $x - 1 \geq \ln x$.

Pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour f'' , 0,5 point pour le signe, 0,5 point pour la conclusion ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la position citée, 1 point pour la transformation de l'inégalité.

Exercice 5 : La fonction $\ln x$ sur x (4 points)

- a. En 0 : $\frac{\ln x}{x} = \ln x \times \frac{1}{x}$, avec $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$.
Donc **l'axe des ordonnées est asymptote verticale**.

Ensuite, en $+\infty$, par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, donc **l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $+\infty$** .

- b. D'après l'exercice 1, $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Puisque $x^2 > 0$, $g'(x)$ a donc le signe de $1 - \ln x$:

$$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e.$$

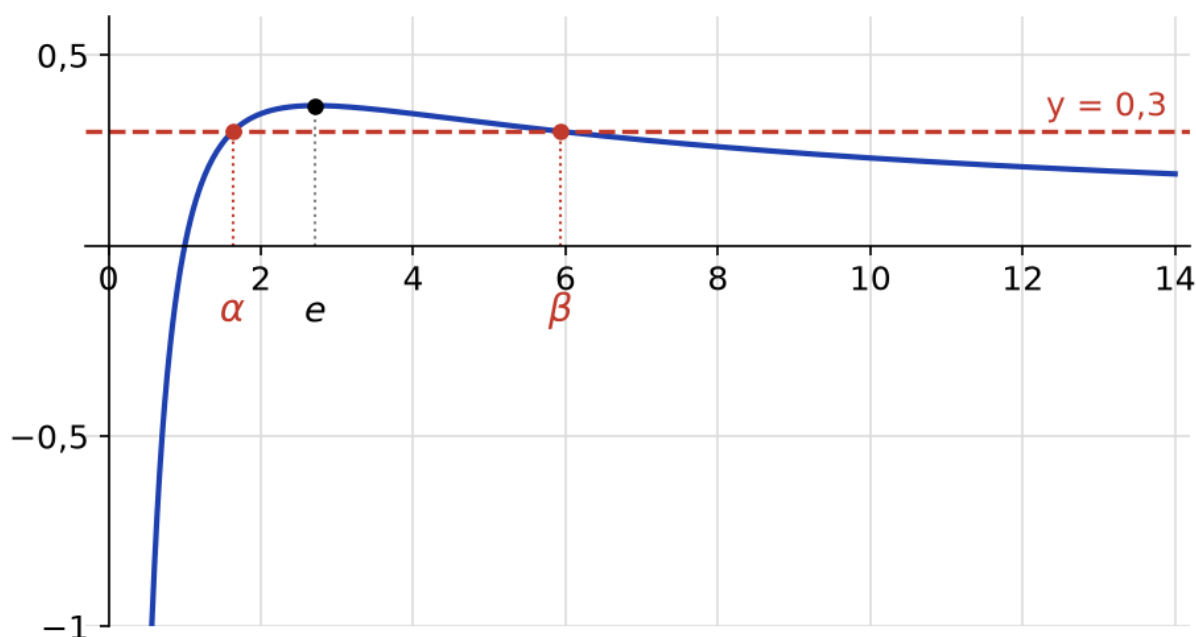
Ainsi, g est strictement croissante sur $]0; e]$ et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$. Son maximum est $g(e) = \frac{1}{e} \approx 0,37$.

- c. D'abord, sur $]0; 1]$, $\ln x \leq 0$ donc $g(x) \leq 0$: pas de solution.

Ensuite, sur $[1; e]$, g est continue et strictement croissante, avec $g(1) = 0$ et $g(e) = \frac{1}{e}$.
Puisque $0 < 0,3 < \frac{1}{e}$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne une unique solution α dans $]1; e[$.

Enfin, sur $[e; +\infty[$, g est continue et strictement décroissante. De plus, $g(e) = \frac{1}{e} > 0,3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 < 0,3$: il existe donc une unique solution β dans $]e; +\infty[$.

L'équation $g(x) = 0,3$ admet exactement deux solutions (à la calculatrice, $\alpha \approx 1,63$ et $\beta \approx 5,94$).



Barème : a) 1 point : 0,25 point par limite, 0,25 point par asymptote ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour le signe, 0,5 point pour les variations et le maximum ; c) 1,5 point : 0,5 point pour $]0 ; 1]$, 0,5 point par solution justifiée.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : étude de fonctions avec logarithme

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « [La fonction logarithme népérien](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [logarithmes](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale](#) classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : équations et inéquations avec \$\ln\$](#)
- [Contrôle de maths Terminale : suites et fonction logarithme](#)