

Corrigé du contrôle de maths Terminale : étude d'une fonction trigonométrique

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Parité et périodicité	3 points
Exercice 2 : Dériver des fonctions trigonométriques	3 points
Exercice 3 : Étude complète d'une fonction	8 points
Exercice 4 : Oscillation d'un ressort	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Parité et périodicité (3 points)

- a. D'abord, l'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Ensuite, pour tout réel x , comme la fonction sinus est impaire :

$$h(-x) = (-x)\sin(-x) = (-x) \times (-\sin x) = x\sin x = h(x).$$

Donc h est paire.

- b. Pour tout réel x :

$$k(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) + \cos(4x + 4\pi).$$

Or sinus et cosinus sont 2π -périodiques, donc $\sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$ et

$$\cos(4x + 4\pi) = \cos(4x + 2 \times 2\pi) = \cos(4x).$$

Donc $k(x + \pi) = k(x)$: k est périodique de période π .

- c. Pour tout réel x , $\cos x \geq -1$, donc $2 + \cos x \geq 1 > 0$. Ainsi, le dénominateur ne s'annule jamais et m est définie sur $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0.

Ensuite, pour tout réel x : $m(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{-\sin x}{2 + \cos x} = -m(x)$, car sinus est impaire et cosinus est paire.

Donc m est impaire.

Erreur fréquente : oublier de vérifier que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 avant de calculer $f(-x)$.

Barème : a) 1 point (0,5 pour l'usage de l'imparité de sinus, 0,5 pour la conclusion) ; b) 1 point (0,5 pour le calcul de $k(x + \pi)$, 0,5 pour la justification par la 2π -périodicité) ; c) 0,5 point pour l'ensemble de définition, 0,5 point pour l'imparité.

Exercice 2 : Dériver des fonctions trigonométriques (3 points)

- a. La dérivée de $x \rightarrow \sin(ax + b)$ est $x \rightarrow a \cos(ax + b)$. Ainsi, avec $a = 2$:

$$f'_1(x) = 3 \times 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 6 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

- b. $f_2 = u^2$ avec $u = \cos$, donc $f'_2 = 2u'u$:

$$f'_2(x) = 2 \times (-\sin x) \times \cos x = -2 \sin x \cos x = -\sin(2x).$$

- c. Ici, $m = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$, $v(x) = 2 + \cos x$,
 $v'(x) = -\sin x$.

$$\text{Alors } m'(x) = \frac{\cos x (2 + \cos x) - \sin x \times (-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2}.$$

Enfin, comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: $m'(x) = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.

Barème : a) 1 point (0,5 si le facteur 2 est oublié) ; b) 1 point (0,5 pour la formule $2u'u$, 0,5 pour le résultat) ; c) 0,5 point pour la formule du quotient correctement appliquée, 0,5 point pour la simplification par $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Exercice 3 : Étude complète d'une fonction (8 points)

a. **Périodicité.** Pour tout réel x :

$f(x + 2\pi) = \cos(2x + 4\pi) + 2\cos(x + 2\pi) = \cos(2x) + 2\cos x = f(x)$, car cosinus est 2π -périodique. Donc f est 2π -périodique.

Parité. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, cosinus étant paire,

$f(-x) = \cos(-2x) + 2\cos(-x) = \cos(2x) + 2\cos x = f(x)$. Donc f est paire.

Comme f est 2π -périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi ; \pi]$. De plus, elle est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi, il suffit de l'étudier sur $[0 ; \pi]$, puis de compléter par symétrie et par translations.

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On utilise alors la dérivée de $\cos(ax + b)$, qui est $-a\sin(ax + b)$:

$$f'(x) = -2\sin(2x) - 2\sin x = -2 \times 2\sin x \cos x - 2\sin x = -4\sin x \cos x - 2\sin x.$$

Enfin, en factorisant par $-2\sin x$: $f'(x) = -2\sin x (2\cos x + 1)$.

c. Sur $[0 ; \pi]$, $\sin x \geq 0$, et $\sin x = 0$ seulement pour $x = 0$ et $x = \pi$. Donc $-2\sin x \leq 0$.

Ensuite, $2\cos x + 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2}$. Sur le cercle trigonométrique, pour $x \in [0 ; \pi]$, le point associé est sur le demi-cercle supérieur. Son abscisse est supérieure à $-\frac{1}{2}$ lorsque

$x \in \left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right[$, car $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Ainsi $2\cos x + 1 > 0$ sur $\left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right[$, s'annule en $\frac{2\pi}{3}$ et est négatif sur $\left]\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$.

Par conséquent, avec la règle des signes : $f'(x) < 0$ sur $\left]0 ; \frac{2\pi}{3}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{2\pi}{3} ; \pi\right[$.

Valeurs : $f(0) = \cos 0 + 2\cos 0 = 1 + 2 = 3$;
 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + 2\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$;
 $f(\pi) = \cos(2\pi) + 2\cos\pi = 1 - 2 = -1$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$-2\sin x$	0	—	—	—	0
$2\cos x + 1$	+	+	0	—	—
$f'(x)$	0	—	0	+	0
f	3	décroissante	$-\frac{3}{2}$	croissante	-1

Donc f est décroissante sur $\left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$. Son minimum sur $[0 ; \pi]$ est $-\frac{3}{2}$, atteint en $\frac{2\pi}{3}$.

Questions d à f : tangente et équation $f(x) = 0$

d. D'abord, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi + 2\cos\frac{\pi}{2} = -1 + 0 = -1$ et
 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \times 1 \times (2 \times 0 + 1) = -2$.

Ensuite, $T : y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$.

Ainsi, $T : y = -2x + \pi - 1$.

e. Sur $\left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right]$, f est continue et strictement décroissante, avec $f(0) = 3 > 0$ et
 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} < 0$. Alors, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,
l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans cet intervalle.

Cependant, sur $\left[\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$, f est croissante donc $f(x) \leq f(\pi) = -1 < 0$: pas de solution.

L'équation admet donc une unique solution α dans $[0 ; \pi]$. De plus, comme f est

paire, $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$ et $-\alpha \neq \alpha$ car $\alpha \neq 0$. Il y a donc exactement deux solutions dans $[-\pi ; \pi]$, α et $-\alpha$.

f. Avec $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$: $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$. Puis, en posant $X = \cos x$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2X^2 + 2X - 1 = 0$.

$\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $X_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \approx -1,37$
et $X_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \approx 0,37$.

Or $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc la valeur $X_1 < -1$ est impossible. **Donc** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

Enfin, à la calculatrice : $f(1,19) \approx 0,020 > 0$ et $f(1,20) \approx -0,013 < 0$. **Donc**
 $1,19 < \alpha < 1,20$.

Erreur fréquente : écrire que $\cos x > -\frac{1}{2}$ sur tout $[0 ; \pi]$ sans regarder le cercle. En effet, le signe de $2\cos x + 1$ change en $\frac{2\pi}{3}$, pas en $\frac{\pi}{2}$.

Barème : a) 1,5 point (0,5 pour la périodicité, 0,5 pour la parité, 0,5 pour la réduction à $[0 ; \pi]$) ; b) 1,5 point (0,5 pour la dérivée de $\cos(2x)$, 0,5 pour l'usage de $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, 0,5 pour la factorisation) ; c) 2 points (1 pour le signe justifié, 0,5 pour les valeurs exactes, 0,5 pour le tableau) ; d) 1 point (0,5 pour les deux valeurs, 0,5 pour l'équation) ; e) 1 point (0,5 pour le corollaire avec ses hypothèses, 0,5 pour les deux solutions par parité) ; f) 1 point (0,5 pour la valeur exacte, 0,5 pour l'encadrement).

Exercice 4 : Oscillation d'un ressort (6 points)

a. Pour tout réel t : $6\cos\left(\pi(t+2) - \frac{\pi}{3}\right) = 6\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = 6\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$, car cosinus est 2π -périodique.

Ainsi, la fonction est 2-périodique : la masse repasse au même endroit, avec la même vitesse, toutes les 2 secondes. C'est donc la durée d'une oscillation complète (aller-retour).

b. $x(0) = 6\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 6\cos\frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{1}{2} = 3.$

Donc, à $t = 0$, la masse est à 3 cm de sa position d'équilibre (du côté positif).

c. La dérivée de $t \rightarrow \cos(at + b)$ est $t \rightarrow -a\sin(at + b)$. Ainsi, avec $a = \pi$:

$$v(t) = -6\pi\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right).$$

Questions d à f : équilibre, vitesse et élongation

d. D'abord, on pose $u = \pi t - \frac{\pi}{3}$. Pour $t \in [0 ; 2]$, $u \in \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right]$.

Ensuite, $x(t) = 0 \Leftrightarrow \cos u = 0$. Dans $\left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right]$, les solutions sont $u = \frac{\pi}{2}$ et $u = \frac{3\pi}{2}$ (la valeur $-\frac{\pi}{2}$ est hors de l'intervalle).

$$\text{Puis } \pi t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi t = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow t = \frac{5}{6} ; \quad \pi t - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \pi t = \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow t = \frac{11}{6}.$$

Ainsi, la masse passe par sa position d'équilibre aux instants $t = \frac{5}{6}$ s et $t = \frac{11}{6}$ s.

e. Pour tout t , $\left|\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\right| \leq 1$, donc $|v(t)| \leq 6\pi$.

L'égalité a lieu lorsque $\sin u = \pm 1$, c'est-à-dire $\cos u = 0$. Ce sont donc les instants $t = \frac{5}{6}$ s et $t = \frac{11}{6}$ s de la question d).

La vitesse maximale vaut $6\pi \approx 18,8$ cm/s ; elle est atteinte quand la masse passe par sa position d'équilibre.

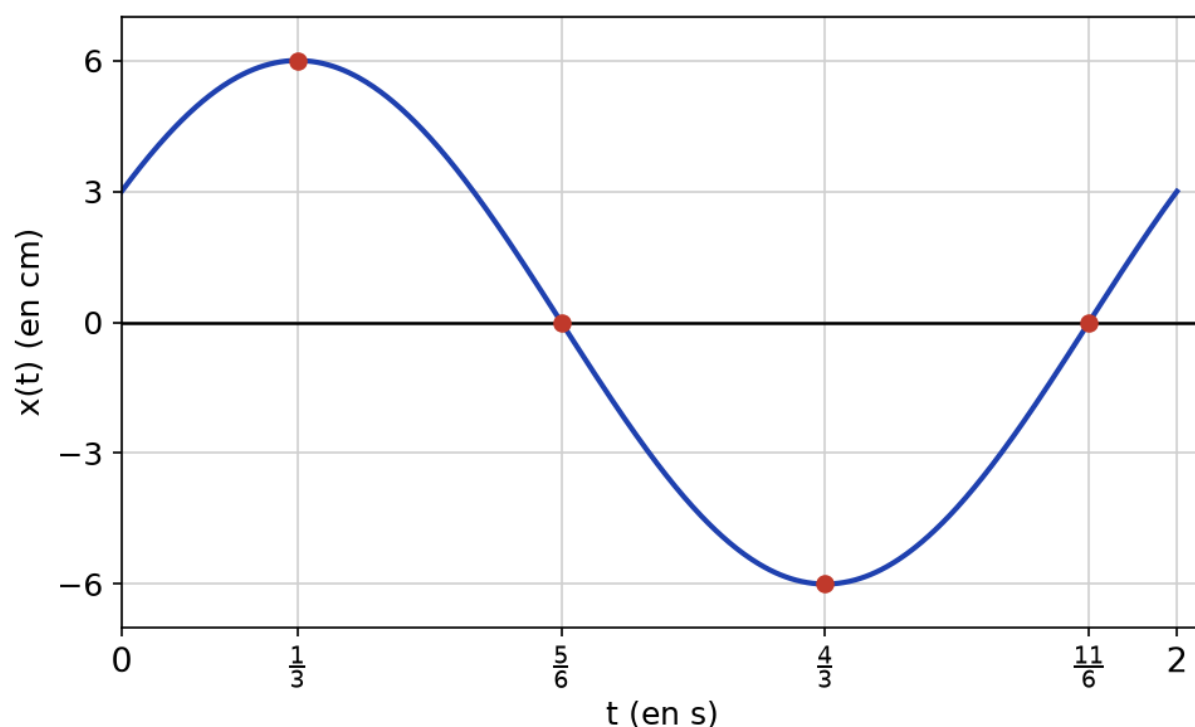
f. $v(t)$ est du signe de $-\sin u$. Sur $\left[-\frac{\pi}{3} ; 0\right]$, $\sin u < 0$; sur $]0 ; \pi[$, $\sin u > 0$; sur $\left]\pi ; \frac{5\pi}{3}\right]$, $\sin u < 0$.

Or $u = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ et $u = \pi \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$. Donc $v(t) > 0$ sur $\left]0 ; \frac{1}{3}\right[$, $v(t) < 0$ sur $\left]\frac{1}{3} ; \frac{4}{3}\right[$, $v(t) > 0$ sur $\left]\frac{4}{3} ; 2\right]$.

$$\text{Enfin, } x\left(\frac{1}{3}\right) = 6\cos 0 = 6 ; \quad x\left(\frac{4}{3}\right) = 6\cos\pi = -6 ; \quad x(2) = 6\cos\frac{5\pi}{3} = 6 \times \frac{1}{2} = 3.$$

t	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{4}{3}$		2
$v(t)$		+	0	-	0	+	
x	3	croissante	6	décroissante	-6	croissante	3

L'élongation maximale est donc de 6 cm de chaque côté de la position d'équilibre (atteinte en $t = \frac{1}{3}$ s et $t = \frac{4}{3}$ s).



Barème : a) 1 point (0,5 pour le calcul, 0,5 pour l'interprétation) ; b) 0,5 point ; c) 1 point (0,5 si le facteur π manque) ; d) 1,5 point (0,5 pour l'intervalle de ω , 0,5 pour les solutions en ω , 0,5 pour les instants) ; e) 1 point (0,5 pour l'inégalité, 0,5 pour les instants et la valeur) ; f) 1 point (0,5 pour le signe de ω , 0,5 pour le tableau et l'élongation).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : étude d'une fonction trigonométrique

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « [Fonctions sinus et cosinus](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [les fonctions sinus et cosinus](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : fonctions sinus et cosinus](#)