

Corrigé du contrôle de maths Terminale : espérance, variance et concentration

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Le jeu de la roue	4 points
Exercice 2 : Des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit	3 points
Exercice 3 : Temps d'attente au snack	4 points
Exercice 4 : Paquets de pâtes	4 points
Exercice 5 : La pièce imprimée en 3D	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Le jeu de la roue (4 points)

a. La somme des probabilités d'une loi vaut 1 :

$$p = 1 - (0,5 + 0,25 + 0,2) = 1 - 0,95 = 0,05$$

$$p = 0,05 .$$

b. $E(G) = -2 \times 0,5 + 0 \times 0,25 + 3 \times 0,2 + 10 \times 0,05$

$$E(G) = -1 + 0 + 0,6 + 0,5 = 0,1$$

$$E(G) = 0,1 \text{ €}.$$

c. On utilise la formule de König-Huygens $V(G) = E(G^2) - E(G)^2$.

$$E(G^2) = 4 \times 0,5 + 0 \times 0,25 + 9 \times 0,2 + 100 \times 0,05 = 2 + 0 + 1,8 + 5 = 8,8$$

$$V(G) = 8,8 - 0,1^2 = 8,8 - 0,01 = 8,79$$

$$\sigma(G) = \sqrt{8,79} \approx 2,96$$

$$V(G) = 8,79 \text{ et } \sigma(G) \approx 2,96 \text{ €}.$$

d. $E(G) = 0,1 > 0$: **le jeu est donc favorable au joueur**. En effet, sur un grand nombre de parties, un joueur gagne en moyenne 10 centimes%5C, par partie. Ainsi, sur 400 parties, les joueurs gagnent au total environ $400 \times 0,1 = 40$ €. Par conséquent, **l'organisateur perd en moyenne environ 40 € dans la journée**. Il devrait alors revoir les lots ou la mise.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour $V(G)$, 0,5 point pour $\sigma(G)$; d) 0,5 point pour la conclusion, 0,5 point pour l'interprétation sur 400 parties.

Erreur fréquente : oublier le carré de l'espérance et écrire $V(G) = 8,8$. Pourtant, la formule directe $V(G) = \sum P(G = g)(g - E(G))^2$ donne bien 8,79.

Exercice 2 : Des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit (3 points)

a. Par linéarité de l'espérance : $E(aT + b) = aE(T) + b$.

$$E(F) = 1,8 \times 20 + 32 = 36 + 32 = 68$$

$$E(F) = 68 \text{ degrés Fahrenheit.}$$

b. On sait de plus que $V(aT + b) = a^2 V(T)$.

$$V(F) = 1,8^2 \times 4 = 3,24 \times 4 = 12,96$$

$$\sigma(F) = \sqrt{12,96} = 3,6 \text{ (on vérifie : } \sigma(F) = 1,8 \times \sigma(T) = 1,8 \times 2 = 3,6 \text{)}.$$

$$V(F) = 12,96 \text{ et } \sigma(F) = 3,6.$$

- c. Ajouter 32 décale toutes les valeurs, et donc leur moyenne, de la même quantité. Ainsi, les écarts à la moyenne $F - E(F)$ ne changent pas. **Or la variance mesure la dispersion autour de la moyenne : elle n'est donc pas modifiée par l'ajout d'une constante.**

Barème : a) 0,5 point pour la propriété, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour la propriété a^2V , 0,5 point pour $V(F)$, 0,5 point pour $\sigma(F)$; c) 0,5 point.

Erreur fréquente : écrire $V(F) = 1,8 \times 4 = 7,2$. En effet, le coefficient a est élevé au carré dans la variance.

Exercice 3 : Temps d'attente au snack (4 points)

- a. Par linéarité de l'espérance : $E(T) = E(X) + E(Y) = 3 + 1 = 4$.

X et Y sont indépendantes, donc $V(T) = V(X) + V(Y) = 0,64 + 0,36 = 1$ et $\sigma(T) = \sqrt{1} = 1$.

$E(T) = 4$ min, $V(T) = 1$ et $\sigma(T) = 1$ min. L'hypothèse indispensable est **l'indépendance de X et Y**. En effet, l'additivité de l'espérance est toujours vraie. Cependant, celle de la variance ne l'est pas.

- b. D'abord, par linéarité : $E(S) = 30 \times E(T) = 30 \times 4 = 120$.

Ensuite, les T_i sont indépendantes, donc $V(S) = 30 \times V(T) = 30 \times 1 = 30$ et $\sigma(S) = \sqrt{30} \approx 5,5$.

$$E(S) = 120 \text{ min, } V(S) = 30 \text{ et } \sigma(S) \approx 5,5 \text{ min.}$$

- c. $E(M) = \frac{E(S)}{30} = \frac{120}{30} = 4$ et $V(M) = \frac{V(S)}{30^2} = \frac{30}{900} = \frac{1}{30} \approx 0,033$.

$E(M) = 4$ et $V(M) = \frac{1}{30}$. La moyenne M a la même espérance que T, mais **une variance 30 fois plus petite**. Ainsi, la durée moyenne sur 30 menus est beaucoup moins dispersée que la durée d'un seul menu.

Barème : a) 0,5 point pour $E(T)$, 0,5 point pour $V(T)$ et $\sigma(T)$, 0,5 point pour l'hypothèse d'indépendance ; b) 0,5 point par grandeur ; c) 0,5 point pour les deux calculs, 0,5 point pour la remarque.

Exercice 4 : Paquets de pâtes (4 points)

- a. D'abord, $V(X) = \sigma(X)^2 = 16$. Ensuite, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$: $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$.

Avec $\delta = 10$: $P(|X - 500| \geq 10) \leq \frac{16}{100} = 0,16$.

$$P(|X - 500| \geq 10) \leq 0,16.$$

- b. L'événement « $490 < X < 510$ » s'écrit $|X - 500| < 10$. C'est donc l'événement contraire de $|X - 500| \geq 10$.

$$P(490 < X < 510) = 1 - P(|X - 500| \geq 10) \geq 1 - 0,16 = 0,84$$

Au moins 84 % des paquets ont une masse strictement comprise entre 490 g et 510 g.

- c. On veut $\frac{16}{\delta^2} \leq 0,04$, soit $\delta^2 \geq \frac{16}{0,04} = 400$, soit $\delta \geq 20$ (car $\delta > 0$).

Le plus petit réel qui convient est $\delta = 20$ g.

- d. La question b donne seulement une **majoration** : au plus 16 % des paquets sont hors de $]490 ; 510[$. Observer 5 % est donc compatible, puisque $5 \% \leq 16 \%$. **Il n'y a pas de contradiction**. En effet, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est valable pour toutes les lois. Par conséquent, elle donne souvent une borne large.

Barème : a) 0,5 point pour l'inégalité citée, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour l'événement

contraire, 0,5 point pour la minoration ; c) 0,5 point pour l'inéquation, 0,5 point pour $\delta = 20$; d) 1 point pour l'argument « majoration ».

Erreur fréquente : diviser par σ au lieu de $\sigma^2 = V(X)$, et obtenir $\frac{4}{100}$ à la question a.

Exercice 5 : La pièce imprimée en 3D (5 points)

a. $f(x) = x - x^2$ est dérivable sur $[0;1]$ et $f'(x) = 1 - 2x$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$: f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Son maximum est $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Comme p est dans $[0;1]$:

$$V(X_i) = p(1 - p) = f(p) \leq \frac{1}{4}.$$

b. $P(|M_n - p| \geq 0,05) \leq \frac{V(X_1)}{1000 \times 0,05^2} \leq \frac{0,25}{1000 \times 0,0025} = \frac{0,25}{2,5} = 0,1$

$P(|M_n - p| \geq 0,05) \leq 0,1$. Ainsi, sur 1 000 lancers, la fréquence de pile s'écarte de p d'au moins 0,05 avec une probabilité d'au plus 10 %. Autrement dit, **avec une probabilité d'au moins 0,9, la fréquence observée est dans $]p - 0,05; p + 0,05[$** .

c. D'après a, $P(|M_n - p| \geq 0,02) \leq \frac{0,25}{n \times 0,02^2} = \frac{0,25}{0,0004 n} = \frac{625}{n}$.

Il suffit alors que $\frac{625}{n} \leq 0,05$, c'est-à-dire $n \geq \frac{625}{0,05} = 12\,500$.

Avec $n = 12\,500$ lancers (ou plus), on est sûr que $P(|M_n - p| \geq 0,02) \leq 0,05$, quelle que soit la valeur de p .

d. **Loi des grands nombres :** pour tout réel $\delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - p| \geq \delta) = 0$. Ainsi, quand le nombre de lancers augmente, la fréquence de pile se rapproche de p avec une probabilité qui tend vers 1.

Or, sur la figure, la fréquence se stabilise autour de 0,55 après 1 000 lancers. **On peut donc estimer $p \approx 0,55$** : la pièce semble légèrement déséquilibrée en faveur de pile.

Barème : a) 0,5 point pour la dérivée et les variations, 0,5 point pour le maximum ; b) 1 point pour le calcul, 0,5 point pour la phrase ; c) 0,5 point pour la majoration par $\frac{625}{n}$, 1 point pour la résolution ; d) 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour l'estimation (toute valeur entre 0,54 et 0,56 est acceptée).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : espérance, variance et concentration

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « [Les probabilités conditionnelles](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés probabilités**.

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : épreuves indépendantes et loi binomiale](#)
- [Contrôle de maths Terminale : dénombrement et loi binomiale](#)