Corrigé du contrôle de maths Terminale : espérance, variance et concentration

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Le jeu de la roue	4 points
Exercice 2 : Des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit	3 points
Exercice 3 : Temps d'attente au snack	4 points
Exercice 4 : Paquets de pâtes	4 points
Exercice 5 : La pièce imprimée en 3D	5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Le jeu de la roue (4 points)

a. La somme des probabilités d'une loi vaut 1 :

$$p = 1 - (0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}2) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

$$p = 0{,}05 \text{ .}$$

b. $E(G) = -2 \times 0{,}5 + 0 \times 0{,}25 + 3 \times 0{,}2 + 10 \times 0{,}05$

$$E(G) = -1 + 0 + 0{,}6 + 0{,}5 = 0{,}1$$

$$E(G) = 0{,}1 \text{ €.}$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

c. On utilise la formule de König-Huygens $V(G) = E(G^2) - E(G)^2$.

$$E(G^2) = 4 \times 0{,}5 + 0 \times 0{,}25 + 9 \times 0{,}2 + 100 \times 0{,}05 = 2 + 0 + 1{,}8 + 5 = 8{,}8$$

$$V(G) = 8{,}8 - 0{,}1^2 = 8{,}8 - 0{,}01 = 8{,}79$$

$$\sigma(G) = \sqrt{8{,}79} \approx 2{,}96$$

$V(G) = 8{,}79$ **et** $\sigma(G) \approx 2{,}96$ **€.**

d. $E(G) = 0{,}1 > 0$: **le jeu est donc favorable au joueur**. En effet, sur un grand nombre de parties, un joueur gagne en moyenne 10 centimes%5C, par partie. Ainsi, sur 400 parties, les joueurs gagnent au total environ $400 \times 0{,}1 = 40$ €. Par conséquent, **l'organisateur perd en moyenne environ 40 € dans la journée**. Il devrait alors revoir les lots ou la mise.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour V(G), 0,5 point pour σ(G) ; d) 0,5 point pour la conclusion, 0,5 point pour l'interprétation sur 400 parties.

Erreur fréquente : oublier le carré de l'espérance et écrire $V(G) = 8{,}8$. Pourtant, la formule directe $V(G) = \sum P(G = g)(g - E(G))^2$ donne bien $8{,}79$.

Exercice 2 : Des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit (3 points)

a. Par linéarité de l'espérance : $E(aT + b) = aE(T) + b$.

$$E(F) = 1{,}8 \times 20 + 32 = 36 + 32 = 68$$

$E(F) = 68$ **degrés Fahrenheit.**

b. On sait de plus que $V(aT + b) = a^2 V(T)$.

$$V(F) = 1{,}8^2 \times 4 = 3{,}24 \times 4 = 12{,}96$$

$\sigma(F) = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6$ (on vérifie : $\sigma(F) = 1{,}8 \times \sigma(T) = 1{,}8 \times 2 = 3{,}6$).

$V(F) = 12{,}96$ **et** $\sigma(F) = 3{,}6$ **.**

c. Ajouter 32 décale toutes les valeurs, et donc leur moyenne, de la même quantité. Ainsi, les écarts à la moyenne $F - E(F)$ ne changent pas. **Or la variance mesure la dispersion autour de la moyenne : elle n'est donc pas modifiée par l'ajout d'une constante.**

Barème : a) 0,5 point pour la propriété, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour la propriété a^2V, 0,5 point pour V(F), 0,5 point pour σ(F) ; c) 0,5 point.

Erreur fréquente : écrire $V(F) = 1{,}8 \times 4 = 7{,}2$. En effet, le coefficient a est élevé au carré dans la variance.

Exercice 3 : Temps d'attente au snack (4 points)

a. Par linéarité de l'espérance : $E(T) = E(X) + E(Y) = 3 + 1 = 4$.

X et Y sont indépendantes, donc $V(T) = V(X) + V(Y) = 0{,}64 + 0{,}36 = 1$ et $\sigma(T) = \sqrt{1} = 1$.

$E(T) = 4$ **min,** $V(T) = 1$ **et** $\sigma(T) = 1$ **min.** L'hypothèse indispensable est **l'indépendance de X et Y**. En effet, l'additivité de l'espérance est toujours vraie. Cependant, celle de la variance ne l'est pas.

b. D'abord, par linéarité : $E(S) = 30 \times E(T) = 30 \times 4 = 120$.

Ensuite, les T_i sont indépendantes, donc $V(S) = 30 \times V(T) = 30 \times 1 = 30$ et $\sigma(S) = \sqrt{30} \approx 5{,}5$.

$E(S) = 120$ **min,** $V(S) = 30$ **et** $\sigma(S) \approx 5{,}5$ **min.**

c. $E(M) = \frac{E(S)}{30} = \frac{120}{30} = 4$ et $V(M) = \frac{V(S)}{30^2} = \frac{30}{900} = \frac{1}{30} \approx 0{,}033$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$E(M) = 4$ **et** $V(M) = \frac{1}{30}$ **.** La moyenne M a la même espérance que T, mais **une variance 30 fois plus petite**. Ainsi, la durée moyenne sur 30 menus est beaucoup moins dispersée que la durée d'un seul menu.

Barème : a) 0,5 point pour E(T), 0,5 point pour V(T) et σ(T), 0,5 point pour l'hypothèse d'indépendance ; b) 0,5 point par grandeur ; c) 0,5 point pour les deux calculs, 0,5 point pour la remarque.

Exercice 4 : Paquets de pâtes (4 points)

a. D'abord, $V(X) = \sigma(X)^2 = 16$. Ensuite, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$: $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$.

Avec $\delta = 10$: $P(|X - 500| \geq 10) \leq \frac{16}{100} = 0{,}16$.

$P(|X - 500| \geq 10) \leq 0{,}16$ **.**

b. L'événement « $490 < X < 510$ » s'écrit $|X - 500| < 10$. C'est donc l'événement contraire de $|X - 500| \geq 10$.

$$P(490 < X < 510) = 1 - P(|X - 500| \geq 10) \geq 1 - 0{,}16 = 0{,}84$$

Au moins $84\ \%$ **des paquets ont une masse strictement comprise entre 490 g et 510 g.**

c. On veut $\frac{16}{\delta^2} \leq 0{,}04$, soit $\delta^2 \geq \frac{16}{0{,}04} = 400$, soit $\delta \geq 20$ (car $\delta > 0$).

Le plus petit réel qui convient est $\delta = 20$ **g.**

d. La question b donne seulement une **majoration** : au plus $16\ \%$ des paquets sont hors de $]490\ ;510[$. Observer $5\ \%$ est donc compatible, puisque $5\ \% \leq 16\ \%$. **Il n'y a pas de contradiction**. En effet, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est valable pour toutes les lois. Par conséquent, elle donne souvent une borne large.

Barème : a) 0,5 point pour l'inégalité citée, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour l'événement

contraire, 0,5 point pour la minoration ; c) 0,5 point pour l'inéquation, 0,5 point pour δ = 20 ; d) 1 point pour l'argument « majoration ».

Erreur fréquente : diviser par σ au lieu de $\sigma^2 = V(X)$, et obtenir $\frac{4}{100}$ à la question a.

Exercice 5 : La pièce imprimée en 3D (5 points)

a. $f(x) = x - x^2$ est dérivable sur $[0\,;1]$ et $f'(x) = 1 - 2x$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$: f est croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

Son maximum est $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Comme p est dans $[0\,;1]$:

$V(X_i) = p(1-p) = f(p) \leq \frac{1}{4}$.

b. $P(|M_n - p| \geq 0{,}05) \leq \frac{V(X_1)}{1000 \times 0{,}05^2} \leq \frac{0{,}25}{1000 \times 0{,}0025} = \frac{0{,}25}{2{,}5} = 0{,}1$

$P(|M_n - p| \geq 0{,}05) \leq 0{,}1$. Ainsi, sur 1 000 lancers, la fréquence de pile s'écarte de p d'au moins $0{,}05$ avec une probabilité d'au plus $10\,\%$. Autrement dit, **avec une probabilité d'au moins $0{,}9$, la fréquence observée est dans** $]p - 0{,}05\,;p + 0{,}05[$.

c. D'après a, $P(|M_n - p| \geq 0{,}02) \leq \frac{0{,}25}{n \times 0{,}02^2} = \frac{0{,}25}{0{,}0004\,n} = \frac{625}{n}$.

Il suffit alors que $\frac{625}{n} \leq 0{,}05$, c'est-à-dire $n \geq \frac{625}{0{,}05} = 12\,500$.

Avec $n = 12\,500$ lancers (ou plus), on est sûr que $P(|M_n - p| \geq 0{,}02) \leq 0{,}05$, quelle que soit la valeur de p.

d. **Loi des grands nombres :** pour tout réel $\delta > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - p| \geq \delta) = 0$. Ainsi, quand le nombre de lancers augmente, la fréquence de pile se rapproche de p avec une probabilité qui tend vers 1.

Or, sur la figure, la fréquence se stabilise autour de $0{,}55$ après 1 000 lancers. **On peut donc estimer** $p \approx 0{,}55$: la pièce semble légèrement déséquilibrée en faveur de pile.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Barème : a) 0,5 point pour la dérivée et les variations, 0,5 point pour le maximum ; b) 1 point pour le calcul, 0,5 point pour la phrase ; c) 0,5 point pour la majoration par $\frac{625}{n}$ *, 1 point pour la résolution ; d) 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour l'estimation (toute valeur entre 0,54 et 0,56 est acceptée).*

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : espérance, variance et concentration

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « Les probabilités conditionnelles » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** probabilités.

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP à la Terminale.

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- Contrôle de maths Terminale : épreuves indépendantes et loi binomiale
- Contrôle de maths Terminale : dénombrement et loi binomiale