Corrigé du contrôle de maths Terminale : équations et inéquations avec ln

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Propriétés algébriques du logarithme	4 points
Exercice 2 : Résoudre des équations	5 points
Exercice 3 : Résoudre des inéquations	4 points
Exercice 4 : Limites avec ln	3 points
Exercice 5 : Élimination d'un médicament	4 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Propriétés algébriques du logarithme (4 points)

a. D'abord, $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$, donc $\ln 72 = \ln(2^3) + \ln(3^2)$. $A = 3\ln 2 + 2\ln 3$.

b. $\ln\left(\frac{1}{16}\right) = -\ln 16 = -\ln(2^4) = -4\ln 2$ et $\ln\sqrt{27} = \frac{1}{2}\ln 27 = \frac{1}{2}\ln(3^3) = \frac{3}{2}\ln 3$.

Ainsi, $B = -4\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3$.

c. $\ln(e^3) = 3$ et $\ln\left(\frac{e}{2}\right) = \ln e - \ln 2 = 1 - \ln 2$.

Donc $C = 3 - (1 - \ln 2)$. $C = 2 + \ln 2$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

d. $e^{2\ln 3} = e^{\ln(3^2)} = 3^2 = 9$ et $\ln(e^{-2}) = -2$.

Alors $D = 9 - (-2)$. $D = 11$.

Barème : 1 point par expression : 0,5 point pour la propriété utilisée, 0,5 point pour le résultat.

Exercice 2 : Résoudre des équations (5 points)

a. L'équation a un sens si $2x - 1 > 0$, soit $x > \frac{1}{2}$.

Ensuite, $\ln(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x-1) = \ln 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$, et $1 > \frac{1}{2}$.

Donc $S = \{1\}$.

b. L'équation a un sens si $x + 3 > 0$ et $x - 1 > 0$, c'est-à-dire si $x > 1$. Alors, sur $]1\,;+\infty[$:

$$\ln(x+3) + \ln(x-1) = \ln 12 \Leftrightarrow \ln\big((x+3)(x-1)\big) = \ln 12 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 12 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Puis $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64$, donc $x_1 = \frac{-2-8}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-2+8}{2} = 3$.

Cependant, seule la solution 3 appartient à $]1\,;+\infty[$. **Donc** $S = \{3\}$.

Équations par changement de variable

c. On pose $X = e^x$. Puisque $e^{2x} = (e^x)^2$, l'équation devient $X^2 - 5X + 6 = 0$.

Alors $\Delta = 25 - 24 = 1$, donc $X = \frac{5-1}{2} = 2$ ou $X = \frac{5+1}{2} = 3$.

Enfin, $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$ et $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

$S = \{\ln 2 ; \ln 3\}$.

d. L'équation a un sens pour $x > 0$. On pose alors $X = \ln x$: $X^2 - X - 2 = 0$.

Ainsi, $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc $X = \frac{1-3}{2} = -1$ ou $X = \frac{1+3}{2} = 2$.

Ensuite, $\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$ et $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$, deux réels strictement positifs.

$S = \{e^{-1} ; e^2\}$.

Erreur fréquente : garder la solution -5 au b). En effet, pour $x = -5$, $\ln(x-1) = \ln(-6)$ n'existe pas : le domaine de validité élimine cette valeur.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour le domaine, 0,5 point pour la solution ; b) 1,5 point : 0,5 point pour le domaine, 0,5 point pour l'équation du second degré, 0,5 point pour le tri des solutions ; c) 1,5 point : 0,5 point pour le changement de variable, 0,5 point pour X, 0,5 point pour x ; d) 1 point : 0,5 point pour les valeurs de X, 0,5 point pour les solutions.

Exercice 3 : Résoudre des inéquations (4 points)

a. Domaine : $3 - x > 0$, soit $x < 3$. Or la fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$:

$\ln(3-x) \leq \ln 1 \Leftrightarrow 3 - x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Ainsi, $S = [2 ; 3[$.

b. Domaine : $x > 0$ et $4 - x > 0$, soit $0 < x < 4$. Ensuite, par stricte croissance de ln :

$\ln x > \ln(4-x) \Leftrightarrow x > 4 - x \Leftrightarrow x > 2$.

Donc $S =]2 ; 4[$.

c. Les deux membres sont strictement positifs. De plus, ln est strictement croissante :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$e^{3x-1} \geq 5 \Leftrightarrow 3x-1 \geq \ln 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{1+\ln 5}{3}$.

$S = \left[\frac{1+\ln 5}{3};+\infty\right[$, avec $\frac{1+\ln 5}{3} \approx 0{,}87$.

d. Domaine : $x>0$ et $x+6>0$, soit $x>0$. Or, sur $]0;+\infty[$, $2\ln x = \ln(x^2)$, donc :

$\ln(x^2) \leq \ln(x+6) \Leftrightarrow x^2 \leq x+6 \Leftrightarrow x^2-x-6 \leq 0$.

Les racines de x^2-x-6 sont -2 et 3 ($\Delta = 25$). Ainsi, le trinôme est négatif ou nul entre ses racines : $-2 \leq x \leq 3$.

Enfin, avec le domaine : $S =]0;3]$.

Barème : 1 point par inéquation : 0,5 point pour le domaine et la transformation, 0,5 point pour l'intervalle solution.

Exercice 4 : Limites avec ln (3 points)

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3\ln x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (2-3\ln x) = -\infty$.

b. On écrit $\frac{\ln x}{x} = \ln x \times \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$. (Ce n'est pas une forme indéterminée.)

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = \ln 1 = 0$. Par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$.

d. On pose $g(x) = \ln(1+x)$, dérivable en 0 avec $g(0) = 0$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x}$. Ainsi, $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$. C'est le taux d'accroissement de g en 0 : il tend donc vers $g'(0) = 1$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point : 0,5 point pour les limites des deux facteurs, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point ; d) 1 point : 0,5 point pour le taux d'accroissement reconnu, 0,5 point pour la limite.

Exercice 5 : Élimination d'un médicament (4 points)

a. Perdre 20 % revient à multiplier par $1-\frac{20}{100}=0{,}8$: $q_{n+1}=0{,}8\,q_n$. La suite (q_n) est donc géométrique de raison $0{,}8$ et de premier terme $q_0=50$. **Pour tout entier naturel n, $q_n=50\times 0{,}8^n$.**

b. On a $q_3=50\times 0{,}8^3=50\times 0{,}512=25{,}6$. **Ainsi, trois heures après l'injection, il reste $25{,}6$ mg de médicament.**

c. $q_n<0{,}5 \Leftrightarrow 50\times 0{,}8^n<0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}8^n<0{,}01$.

Or la fonction ln est strictement croissante : $0{,}8^n<0{,}01 \Leftrightarrow n\ln 0{,}8<\ln 0{,}01$.

Puisque $0{,}8<1$, $\ln 0{,}8<0$. Donc, en divisant par ce nombre négatif, on change le sens de l'inégalité :

$n>\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$, avec $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}\approx 20{,}64$.

Ainsi, le plus petit entier qui convient est $n=21$ **: le médicament est considéré comme éliminé au bout de 21 heures.**

Contrôle : $q_{20}\approx 0{,}576$ et $q_{21}\approx 0{,}461$.

d. $q_n\leq 25 \Leftrightarrow 0{,}8^n\leq 0{,}5 \Leftrightarrow n\geq\frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}8}$, avec $\frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}8}\approx 3{,}11$. **Au bout de 4 heures** ($q_3=25{,}6$ mais $q_4=20{,}48$).

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Erreur fréquente : écrire $n < \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$ en oubliant que $\ln 0{,}8$ est négatif. On trouverait alors que seules les 20 premières heures conviennent, ce qui est absurde.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour le coefficient multiplicateur, 0,5 point pour la forme explicite ; b) 0,5 point ; c) 2 points : 0,5 point pour l'équivalence avec $0{,}8^n < 0{,}01$*, 0,5 point pour le passage au logarithme, 0,5 point pour le changement de sens justifié, 0,5 point pour* $n = 21$ *; d) 0,5 point.*

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : équations et inéquations avec ln

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « La fonction logarithme népérien » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** logarithmes.

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP à la Terminale.

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- Contrôle de maths Terminale : étude de fonctions avec logarithme
- Contrôle de maths Terminale : suites et fonction logarithme