

Corrigé du contrôle de maths Terminale : équations différentielles $y' = ay + b$

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Premières équations différentielles	3 points
Exercice 2 : Résoudre $y' = ay + b$	5 points
Exercice 3 : Une équation avec second membre	5 points
Exercice 4 : Le refroidissement d'un café	7 points
Total	20 points

Exercice 1 : Premières équations différentielles (3 points)

- a. D'abord, les solutions de $y' = f$ sont les primitives de f . Or une primitive de $3x^2$ est x^3 et une primitive de e^{2x} est $\frac{1}{2}e^{2x}$.

Les solutions sont donc les fonctions $x \rightarrow x^3 - \frac{1}{2}e^{2x} + C$, où C est un réel quelconque.

- b. Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \rightarrow Ce^{ax}$, C réel. Ici $a = -2$.

Ainsi, les solutions sont les fonctions $x \rightarrow Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

- c. Les solutions de $y' = 0,5y$ sont $x \rightarrow Ce^{0,5x}$. Ensuite, la condition $f(0) = 3$ donne

$$Ce^0 = 3, \text{ donc } C = 3.$$

$$f(x) = 3e^{0,5x}.$$

Barème : a) 1 point (0,5 pour chaque primitive, la constante C est exigée) ; b) 1 point ; c) 0,5 point pour la forme générale, 0,5 point pour la constante.

Exercice 2 : Résoudre $y' = ay + b$ (5 points)

- a. Une fonction constante $y = k$ a une dérivée nulle. Elle est donc solution si et seulement si $0 = -3k + 6$, c'est-à-dire $k = 2$.

Ainsi, la fonction constante égale à 2 est solution de (E) .

- b. Les solutions de $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont les fonctions $x \rightarrow Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. Ici $a = -3$, $b = 6$ et $-\frac{b}{a} = 2$.

Par conséquent, les solutions de (E) sont les fonctions $x \rightarrow Ce^{-3x} + 2$, $C \in \mathbb{R}$.

- c. $f(0) = 5 \Leftrightarrow Ce^0 + 2 = 5 \Leftrightarrow C = 3$.

$$f(x) = 3e^{-3x} + 2.$$

- d. $f'(x) = 3 \times (-3)e^{-3x} = -9e^{-3x}$. Or une exponentielle est strictement positive, donc $f'(x) < 0$: **f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.**

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Ainsi, la courbe de f admet la droite d'équation $y = 2$ pour asymptote en $+\infty$.

Erreur fréquente : écrire la solution constante $\frac{b}{a}$ au lieu de $-\frac{b}{a}$. En effet, on trouverait ici -2 , et $y = -2$ ne vérifie pas $0 = -3y + 6$.

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point (1 pour la forme générale, 0,5 pour la constante 2) ; c) 1 point ; d) 1,5 point (0,5 pour la dérivée, 0,5 pour le sens de variation, 0,5 pour la limite justifiée).

Exercice 3 : Une équation avec second membre (5 points)

- a. $p(x) = ax + b$ donc $p'(x) = a$. Ainsi, p est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x :

$$a = -(ax + b) + 2x + 3, \text{ c'est-à-dire } a = (2 - a)x + 3 - b.$$

Par identification des coefficients : $2 - a = 0$ et $3 - b = a$, donc $a = 2$ et $b = 1$.

$$p(x) = 2x + 1. \text{ Vérification : } p'(x) = 2 \text{ et } -(2x + 1) + 2x + 3 = 2.$$

- b. Comme p est solution de (E) , pour tout réel x : $p'(x) = -p(x) + 2x + 3$.

Alors y est solution de (E)

$$\Leftrightarrow y'(x) = -y(x) + 2x + 3 \text{ pour tout } x$$

$$\Leftrightarrow y'(x) - p'(x) = -y(x) + 2x + 3 - (-p(x) + 2x + 3) \text{ pour tout } x$$

$$\Leftrightarrow (y - p)'(x) = -(y - p)(x) \text{ pour tout } x.$$

Donc y est solution de (E) si et seulement si $y - p$ est solution de (E_0) .

- c. Les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \rightarrow Ce^{-x}$, C réel. Donc, d'après b), y est solution de (E) si et seulement si $y(x) - (2x + 1) = Ce^{-x}$.

Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions $x \rightarrow Ce^{-x} + 2x + 1$, $C \in \mathbb{R}$.

- d. $g(0) = 0 \Leftrightarrow Ce^0 + 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow C = -1$.

$$g(x) = -e^{-x} + 2x + 1.$$

Barème : a) 1,5 point (0,5 pour l'égalité à identifier, 0,5 pour les deux coefficients, 0,5 pour la conclusion) ;

b) 1,5 point (0,5 pour l'utilisation de $\mathcal{P}$ solution, 1 pour l'équivalence rédigée) ; c) 1 point ; d) 1 point.

Exercice 4 : Le refroidissement d'un café (7 points)

a. Pour tout $t \geq 0$: $\theta'(t) = -0,1\theta(t) + 0,1 \times 20 = -0,1\theta(t) + 2$.

θ est donc solution de $y' = -0,1y + 2$.

b. Ici $a = -0,1$ et $b = 2$, donc $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{-0,1} = 20$. Les solutions sont alors les fonctions $t \rightarrow Ce^{-0,1t} + 20$, C réel.

Ensuite, $\theta(0) = 80 \Leftrightarrow C + 20 = 80 \Leftrightarrow C = 60$.

Pour tout $t \geq 0$, $\theta(t) = 60e^{-0,1t} + 20$.

c. $\theta(5) = 60e^{-0,5} + 20 \approx 60 \times 0,60653 + 20 \approx 56,39$.

Ainsi, au bout de 5 minutes, le café est à environ 56,4 °C.

Questions d à f : limite et temps de refroidissement

d. $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,1t) = -\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,1t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 20$.

Donc, à long terme, la température du café se rapproche de celle de la pièce, 20 °C.

e. D'abord, $\theta(t) = 50 \Leftrightarrow 60e^{-0,1t} + 20 = 50 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$.

Ensuite, la fonction $\ln$ est définie et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$:
 $-0,1t = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, donc $t = 10 \ln 2$.

Enfin, $10 \ln 2 \approx 6,9315$ min, et $0,9315 \times 60 \approx 55,9$ s.

Le café atteint donc 50 °C au bout de $10 \ln 2$ minutes, soit environ 6 min 56 s.

f. Sur la courbe, l'ordonnée 50 correspond à une abscisse d'environ 7 min. C'est donc cohérent avec e).

De même, l'ordonnée 30 correspond graphiquement à une abscisse d'environ 18 min.

$$\text{Calcul : } 60e^{-0,1t} + 20 = 30 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow -0,1t = -\ln 6 \Leftrightarrow t = 10\ln 6 \approx 17,9.$$

Ainsi, le café descend à 30 °C au bout d'environ 18 minutes ($10\ln 6 \approx 17,9$ min).

Erreur fréquente : résoudre $\theta' = -0,1\theta$ en oubliant le terme constant 2. On obtiendrait alors $\theta(t) = 80e^{-0,1t}$, qui tend vers 0 °C, ce qui est absurde dans une pièce à 20 °C.

Barème : a) 0,5 point ; b) 2 points (0,5 pour la solution constante 20, 0,5 pour la forme générale, 0,5 pour la condition initiale, 0,5 pour la conclusion) ; c) 1 point (0,5 pour le calcul, 0,5 pour l'arrondi avec l'unité) ; d) 1 point (0,5 pour la limite, 0,5 pour l'interprétation) ; e) 1,5 point (0,5 pour l'équation $e^{-0,1t} = \frac{1}{2}$, 0,5 pour la valeur exacte, 0,5 pour la conversion en minutes et secondes) ; f) 1 point (0,5 pour les lectures, 0,5 pour le calcul).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : équations différentielles $y' = ay + b$

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « [Les équations différentielles](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [les équations différentielles](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : primitives de fonctions usuelles](#)