

Corrigé du contrôle de maths Terminale : épreuves indépendantes et loi binomiale

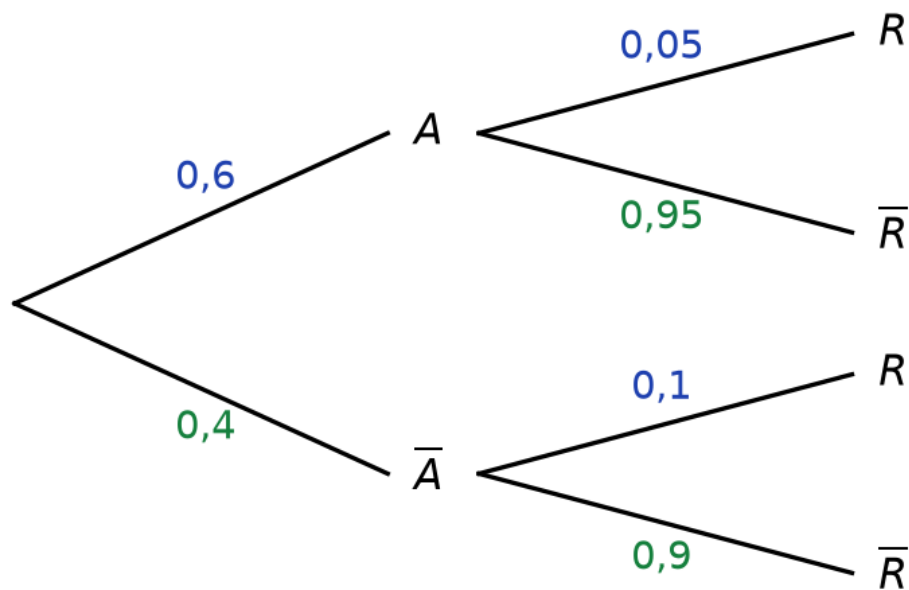
Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Commandes en retard	4 points
Exercice 2 : Reconnaître une loi binomiale	3 points
Exercice 3 : Ampoules défectueuses	6 points
Exercice 4 : Au moins un bonus	3 points
Exercice 5 : Le concours de tir à l'arc	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Commandes en retard (4 points)

a. D'abord, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.

$$P(\overline{A}) = 1 - 0,6 = 0,4 ; P_A(\overline{R}) = 1 - 0,05 = 0,95 ; P_{\overline{A}}(\overline{R}) = 1 - 0,1 = 0,9 .$$



Les pondérations manquantes sont 0,4 ; 0,95 et 0,9.

- b. On multiplie les probabilités le long du chemin :

$$P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = 0,6 \times 0,05 = 0,03. \text{ Ainsi, } P(A \cap R) = 0,03.$$

- c. A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers. Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(\bar{A} \cap R) = 0,03 + 0,4 \times 0,1 = 0,03 + 0,04$$

$$P(R) = 0,07.$$

- d. On cherche ensuite $P_R(A)$:

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0,03}{0,07} = \frac{3}{7}$$

La probabilité cherchée est donc $\frac{3}{7} \approx 0,429$.

- e. $P(A) \times P(R) = 0,6 \times 0,07 = 0,042$ et $P(A \cap R) = 0,03$.

Comme $0,042 \neq 0,03$, **les événements A et R ne sont pas indépendants**. On peut aussi justifier ainsi : $P_A(R) = 0,05 \neq P(R) = 0,07$.

probabilités totales citée, 0,5 point pour le calcul ; d) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour la valeur exacte et l'arrondi ; e) 0,5 point avec la comparaison écrite.

Erreur fréquente : confondre $P_R(A)$ et $P_A(R)$. En effet, la probabilité « sachant que la commande est en retard » se lit $P_R(A)$. Par conséquent, elle ne se lit pas sur l'arbre.

Exercice 2 : Reconnaître une loi binomiale (3 points)

- a. Les deux lancers sont indépendants, donc la probabilité de l'issue (6 ; pile) est le produit des probabilités :

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

La probabilité d'obtenir 6 et pile est $\frac{1}{12}$.

- b. **Situation 1 :** chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de succès « la boule est rouge », de probabilité $\frac{3}{10} = 0,3$. Grâce à la remise, l'urne reste la même à chaque tirage. Ainsi, les 4 épreuves sont identiques et indépendantes. De plus, X compte les succès, donc **X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,3)$.**

Situation 2 : sans remise, la composition de l'urne change après chaque tirage. En effet, la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage dépend du premier. Les épreuves ne sont donc pas indépendantes : **Y ne suit pas une loi binomiale.**

Situation 3 : les lancers sont indépendants, mais S n'est pas un nombre de succès. Par exemple, S peut valoir 37. Or une loi binomiale de paramètre 10 ne prend que des valeurs entre 0 et 10. Par conséquent, **S ne suit pas une loi binomiale.**

Barème : a) 0,5 point pour l'indépendance citée, 0,5 point pour le résultat ; b) 1 point pour la situation 1 (justification et paramètres), 0,5 point pour chacune des situations 2 et 3.

Exercice 3 : Ampoules défectueuses (6 points)

Questions a à c : loi de X et premières probabilités

- a. Chaque prélèvement d'une ampoule est une épreuve de Bernoulli. Son succès « l'ampoule est défectueuse » a pour probabilité $p = 0,04$. Ensuite, on répète cette épreuve 50 fois de façon identique et indépendante, car les tirages sont assimilés à des tirages avec remise. Enfin, X compte le nombre de succès : **X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0,04)$.**

b. $P(X = 0) = 0,96^{50} \approx 0,130$

Ainsi, la probabilité que le lot ne contienne aucune ampoule défectueuse est environ 0,130.

- c. Le nombre de chemins réalisant 2 succès sur 50 épreuves est le coefficient binomial « 2 parmi 50 ». Il vaut $\frac{50 \times 49}{2} = 1225$.

$$P(X = 2) = 1225 \times 0,04^2 \times 0,96^{48} \approx 0,276$$

$$P(X = 2) \approx 0,276.$$

Questions d à f : événement contraire, acceptation du lot et espérance

- d. L'événement « au moins une ampoule défectueuse » est l'événement contraire de « aucune ampoule défectueuse ». Alors :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,96^{50} \approx 0,870$$

La probabilité cherchée est environ 0,870.

- e. On cherche $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$.

La calculatrice (fonction de répartition binomiale, $n = 50$, $p = 0,04$, $k = 3$) donne alors

$$P(X \leq 3) \approx 0,861.$$

(Détail : $P(X = 1) \approx 0,271$ et $P(X = 3) \approx 0,184$, donc

$$0,130 + 0,271 + 0,276 + 0,184 = 0,861.)$$

La probabilité que le lot soit accepté est donc environ 0,861.

f. $E(X) = np = 50 \times 0,04 = 2$

$$V(X) = np(1 - p) = 50 \times 0,04 \times 0,96 = 1,92, \text{ donc } \sigma(X) = \sqrt{1,92} \approx 1,386.$$

$E(X) = 2$ et $\sigma(X) \approx 1,386$. Ainsi, sur un grand nombre de lots de 50 ampoules, on trouve en moyenne 2 ampoules défectueuses par lot.

Barème : a) 1 point (0,5 point pour les conditions du schéma de Bernoulli, 0,5 point pour les paramètres) ; b) 1 point ; c) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour le résultat ; d) 0,5 point pour l'événement contraire, 0,5 point pour le résultat ; e) 0,5 point pour l'écriture $P(X \leq 3)$, 0,5 point pour le résultat ; f) 0,5 point pour les deux calculs, 0,5 point pour l'interprétation.

Erreur fréquente : calculer $P(X < 3)$ au lieu de $P(X \leq 3)$. En effet, « au plus 3 » inclut la valeur 3.

Exercice 4 : Au moins un bonus (3 points)

- a. Le nombre B de bonus obtenus en 10 ouvertures suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,08)$, car on répète 10 épreuves identiques et indépendantes à deux issues.

$$P(B \geq 1) = 1 - P(B = 0) = 1 - 0,92^{10} \approx 1 - 0,434 \approx 0,566$$

La probabilité d'obtenir au moins un bonus en 10 ouvertures est donc environ 0,566.

- b. Avec n ouvertures, le nombre de bonus suit la loi $\mathcal{B}(n; 0,08)$. Ne rien obtenir a pour probabilité $0,92^n$. Donc la probabilité d'au moins un bonus est $1 - 0,92^n$.

$$1 - 0,92^n \geq 0,99$$

$$0,92^n \leq 0,01$$

$n \ln(0,92) \leq \ln(0,01)$ (la fonction $\ln$ est strictement croissante)

$n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,92)}$ (on divise par $\ln(0,92) < 0$, ce qui change le sens de l'inégalité)

$$\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,92)} \approx 55,2$$

Vérification : $0,92^{55} \approx 0,0102 > 0,01$ et $0,92^{56} \approx 0,0094 \leq 0,01$.

Par conséquent, il faut ouvrir au moins 56 coffres.

Barème : a) 0,5 point pour la loi ou l'événement contraire, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour l'expression $1 - 0,92^n$, 1 point pour la résolution (passage au logarithme et changement de sens justifié), 0,5 point pour la réponse $n = 56$. Une recherche au tableur ou à la calculatrice avec les deux valeurs encadrantes est acceptée.

Erreur fréquente : oublier de changer le sens de l'inégalité en divisant par $\ln(0,92)$. Or ce nombre est négatif, et l'on conclut alors à tort $n \leq 55$.

Exercice 5 : Le concours de tir à l'arc (4 points)

a. Chaque tir est une épreuve de Bernoulli : le succès « la flèche est au centre » a pour probabilité 0,7. Cette épreuve est répétée 20 fois de façon identique et indépendante, puis Y compte les succès. Ainsi, **Y suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,7)$** et $E(Y) = 20 \times 0,7 = 14$. $E(Y) = 14$.

b. Inès place Y flèches au centre et $20 - Y$ hors du centre :

$$S = 10Y + 2(20 - Y) = 10Y + 40 - 2Y = 8Y + 40$$

Ensuite, par linéarité de l'espérance : $E(S) = 8E(Y) + 40 = 8 \times 14 + 40 = 152$.

$E(S) = 152$: sur un grand nombre de concours, Inès marquerait en moyenne 152 points.

c. $S \geq 180 \Leftrightarrow 8Y + 40 \geq 180 \Leftrightarrow 8Y \geq 140 \Leftrightarrow Y \geq 17,5$

Or Y est un entier, donc $S \geq 180 \Leftrightarrow Y \geq 18$.

$$P(Y \geq 18) = P(Y = 18) + P(Y = 19) + P(Y = 20)$$

$$P(Y = 18) = 190 \times 0,7^{18} \times 0,3^2 \approx 0,0278 \quad (190 \text{ est le coefficient binomial « 18 parmi 20 »)$$

$$P(Y = 19) = 20 \times 0,7^{19} \times 0,3 \approx 0,0068$$

$$P(Y = 20) = 0,7^{20} \approx 0,0008$$

Enfin, la calculatrice donne $P(Y \geq 18) = 1 - P(Y \leq 17) \approx 0,035$.

La probabilité qu'Inès obtienne la médaille est donc environ 0,035.

Barème : a) 0,5 point pour la loi justifiée, 0,5 point pour l'espérance ; b) 0,5 point pour l'expression de S , 0,5 point pour $E(S)$, 0,5 point pour l'interprétation ; c) 0,5 point pour l'équivalence avec $Y \geq 18$, 0,5 point pour la méthode (somme ou complémentaire), 0,5 point pour le résultat.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : épreuves indépendantes et loi binomiale

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours [« Les probabilités conditionnelles » en Terminale](#) puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [probabilités](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : espérance, variance et concentration](#)
- [Contrôle de maths Terminale : dénombrement et loi binomiale](#)