

Corrigé du contrôle de maths Terminale : dérivée d'une composée et variations

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Dérivées de fonctions composées	5 points
Exercice 2 : Tangente à une courbe	4 points
Exercice 3 : Étude complète d'une fonction	7 points
Exercice 4 : Le point le plus proche	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Dérivées de fonctions composées (5 points)

- a. $f = u^4$ avec $u(x) = 3x - 1$ et $u'(x) = 3$. Or $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, donc $f'(x) = 4 \times 3 \times (3x - 1)^3$. $f'(x) = 12(3x - 1)^3$.
- b. $g = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 5 > 0$ et $u'(x) = 2x$. Or $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}}$. $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$.
- c. $h = e^u$ avec $u(x) = x^2 - 3x$ et $u'(x) = 2x - 3$. Ainsi, comme $(e^u)' = u'e^u$: $h'(x) = (2x - 3)e^{x^2 - 3x}$.
- d. $k(x) = (2x + 1)^{-3}$, donc $k = u^{-3}$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $u'(x) = 2$. La formule $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ reste valable pour $n = -3$ sur un intervalle où u ne s'annule pas.

Alors $k'(x) = -3 \times 2 \times (2x + 1)^{-4}$. $k'(x) = \frac{-6}{(2x + 1)^4}$.

e. $m = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 4 - 2x$, strictement positif sur $] -\infty ; 2[$, et $u'(x) = -2$. Donc $m'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{4-2x}}$. $m'(x) = \frac{-1}{\sqrt{4-2x}}$.

Erreur fréquente : oublier le facteur u' , par exemple écrire $f'(x) = 4(3x - 1)^3$ en a) ou $m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-2x}}$ en e), en perdant le signe moins.

Barème : pour chaque fonction, 0,5 point pour l'identification de u et u' avec la bonne formule, 0,5 point pour le résultat simplifié.

Exercice 2 : Tangente à une courbe (4 points)

- a. $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 2x + 1$, strictement positif pour $x > -\frac{1}{2}$, et $u'(x) = 2$. Donc $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.
- b. D'abord, $f(4) = \sqrt{9} = 3$ et $f'(4) = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$. Ensuite, la tangente au point d'abscisse 4 a pour équation $y = f'(4)(x - 4) + f(4)$, soit $y = \frac{1}{3}(x - 4) + 3 = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} + \frac{9}{3}$.
 $T: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.
- c. Pour $x = -5$: $\frac{1}{3} \times (-5) + \frac{5}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{5}{3} = 0$. **Oui**, $B(-5; 0)$ appartient à T , ce que confirme la figure. En effet, T coupe l'axe des abscisses en -5 .
- d. La tangente au point d'abscisse a est parallèle à la droite $y = x$ si et seulement si elle a le même coefficient directeur, c'est-à-dire $f'(a) = 1$.
- Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{2a+1}} = 1$ équivaut à $\sqrt{2a+1} = 1$, soit $2a + 1 = 1$, donc $a = 0$. Enfin, $f(0) = \sqrt{1} = 1$.

C'est au point de coordonnées $(0; 1)$ que la tangente est parallèle à la droite d'équation

$$y = x.$$

Barème : a) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour $f(4)$ et $f'(4)$, 0,5 point pour la formule de la tangente, 0,5 point pour l'équation réduite ; c) 0,5 point ; d) 0,5 point pour la condition $f'(a) = 1$, 0,5 point pour la résolution et le point.

Exercice 3 : Étude complète d'une fonction (7 points)

- a. En $-\infty$, on a la forme indéterminée « $-\infty \times 0$ ». On développe donc :

$$f(x) = xe^{2x} - 2e^{2x}. \text{ Puis, avec } X = 2x : xe^{2x} = \frac{1}{2}Xe^X.$$

Quand $x \rightarrow -\infty$, $X \rightarrow -\infty$ et, par croissances comparées, $\lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0$. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$ par composition.

Ainsi, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$: **l'axe des abscisses ($y = 0$) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.**

- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$. Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- c. $f = uv$ avec $u(x) = x-2$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^{2x}$, $v'(x) = 2e^{2x}$ (dérivée de e^{ax+b}). Donc :

$$f'(x) = 1 \times e^{2x} + (x-2) \times 2e^{2x} = (1+2x-4)e^{2x}. \quad f'(x) = (2x-3)e^{2x}.$$

- d. **Question d : signe de la dérivée et tableau de variations**
-

Comme $e^{2x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2x-3$: négatif si $x < \frac{3}{2}$, nul en $\frac{3}{2}$, positif si $x > \frac{3}{2}$.

$$\text{Ensuite, } f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 2\right)e^3 = -\frac{1}{2}e^3.$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}e^3$	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum de f vaut $-\frac{1}{2}e^3 \approx -10,04$, atteint en $x = \frac{3}{2}$.

e. $f(0) = (0 - 2)e^0 = -2$ et $f'(0) = (0 - 3)e^0 = -3$. Alors la tangente a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. $y = -3x - 2$.

f. Puisque $e^{2x} > 0$ pour tout réel x , $f(x) = 0$ équivaut à $x - 2 = 0$. **L'unique solution est $x = 2$.**

Erreur fréquente : dériver e^{2x} en e^{2x} au lieu de $2e^{2x}$, ce qui donne une dérivée fausse $(x - 1)e^{2x}$ et un minimum en 1.

Barème : a) 0,5 point pour la transformation, 0,5 point pour la limite, 0,5 point pour l'asymptote ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour la formule du produit, 0,5 point pour la dérivée de e^{2x} , 0,5 point pour la factorisation ; d) 0,5 point pour le signe, 1 point pour le tableau avec les limites, 0,5 point pour le minimum exact et approché ; e) 0,5 point pour $f(0)$ et $f'(0)$, 0,5 point pour l'équation ; f) 0,5 point.

Exercice 4 : Le point le plus proche (4 points)

a. Le point M a pour coordonnées $(x; \sqrt{x})$. Le repère est orthonormé, donc :

$$AM = \sqrt{(x - 2)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x}. \quad d(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

b. Le trinôme $x^2 - 3x + 4$ a pour discriminant

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7 < 0$. Il est donc du signe de son coefficient $1 > 0$, c'est-à-dire strictement positif pour tout réel x . Alors, avec $u(x) = x^2 - 3x + 4$ et $u'(x) = 2x - 3$:

$$d'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}.$$

- c. Le dénominateur est strictement positif, donc $d'(x)$ a le signe de $2x-3$: d est **décroissante sur $[0; \frac{3}{2}]$ et croissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$** . Elle atteint donc son minimum en $\frac{3}{2}$:

$$d\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{16}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

La distance minimale est $AM = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1,32$ unité.

- d. Enfin, M a pour abscisse $\frac{3}{2}$ et pour ordonnée $\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22$. **Le point cherché est $M\left(\frac{3}{2}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, soit environ $(1,5; 1,22)$.**

Barème : a) 0,5 point pour la formule de la distance, 0,5 point pour le développement ; b) 0,5 point pour le signe du trinôme, 0,5 point pour la dérivée ; c) 0,5 point pour les variations, 0,5 point pour la valeur exacte, 0,5 point pour l'arrondi ; d) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : dérivée d'une composée et variations

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « [La dérivée d'une fonction](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [dérivée d'une fonction](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : convexité et points d'inflexion](#)
- [Contrôle de maths Terminale : dérivation et calcul intégral](#)