

Corrigé du contrôle de maths Terminale : dérivation et calcul intégral

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Dérivée, primitive et intégrale	3 points
Exercice 2 : Étude d'une fonction exponentielle	7 points
Exercice 3 : Aire sous la courbe	5 points
Exercice 4 : Un domaine qui s'étend à l'infini	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Dérivée, primitive et intégrale (3 points)

- a. g est le produit de $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = e^{2x}$. De plus, $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2e^{2x}$.

$$\text{Donc } g'(x) = 3e^{2x} + (3x - 1) \times 2e^{2x} = (3 + 6x - 2)e^{2x}.$$

$$g'(x) = (6x + 1)e^{2x}.$$

- b. k est de la forme $\frac{1}{2} u' e^u$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$. Or une primitive de $u' e^u$ est e^u .

Une primitive de k sur $\mathbb{R}$ est $K(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$. (Contrôle : $K'(x) = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2} = x e^{x^2}$)

.)

c. D'abord, une primitive de $x \rightarrow e^{2x} + 3$ est $x \rightarrow \frac{1}{2} e^{2x} + 3x$.

$$\text{Ainsi, } I = \left(\frac{1}{2} e^2 + 3 \right) - \left(\frac{1}{2} e^0 + 0 \right) = \frac{1}{2} e^2 + 3 - \frac{1}{2} = \frac{e^2 + 5}{2}.$$

$$I = \frac{e^2 + 5}{2} \approx 6,19.$$

Barème : a) 0,5 point pour la formule du produit, 0,5 point pour la forme factorisée ; b) 1 point (0,5 point si le coefficient $\frac{1}{2}$ est oublié) ; c) 0,5 point pour la primitive, 0,5 point pour la valeur exacte et l'arrondi.

Exercice 2 : Étude d'une fonction exponentielle (7 points)

a. **En $-\infty$:** $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$. Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

En $+\infty$: $f(x) = x e^{-x} + e^{-x} = \frac{x}{e^x} + e^{-x}$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Par conséquent, **l'axe des abscisses (droite $y = 0$) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.**

Question b : dérivée et variations de f

b. f est le produit de $u(x) = x + 1$ et $v(x) = e^{-x}$. De plus, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

$$\text{Alors } f'(x) = e^{-x} - (x + 1) e^{-x} = (1 - x - 1) e^{-x} = -x e^{-x}.$$

Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $-x$. Elle est donc positive sur $]-\infty ; 0]$, puis négative sur $[0 ; +\infty[$. De plus, $f(0) = 1 \times e^0 = 1$.

Ainsi, f est croissante sur $]-\infty ; 0]$, décroissante sur $[0 ; +\infty[$, de maximum

$f(0) = 1$. Le tableau complet est donné à la question c.

Questions c et d : convexité, point d'inflexion et tangente

c. $f'(x) = -x e^{-x}$ est le produit de $-x$ et e^{-x} :

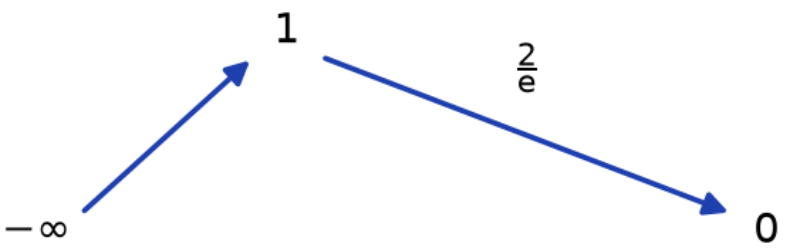
$$f''(x) = -e^{-x} + (-x) \times (-e^{-x}) = (x - 1) e^{-x}.$$

Ensuite, $f''(x)$ a le signe de $x - 1$: négative sur $]-\infty ; 1]$, positive sur $[1 ; +\infty[$.

Donc f est concave sur $]-\infty ; 1]$ et convexe sur $[1 ; +\infty[$. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 1. Par conséquent, $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 1 ;

$$f(1) = 2 e^{-1} = \frac{2}{e}.$$

Le point d'inflexion est $A\left(1; \frac{2}{e}\right)$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$			
$f''(x)$		-	0	+
convexité	concave			convexe

d. $f'(1) = -1 \times e^{-1} = -\frac{1}{e}$. La tangente T a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$:

$$\text{Donc } y = -\frac{1}{e}(x - 1) + \frac{2}{e}.$$

T : $y = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}.$

Or une courbe est au-dessus de ses tangentes là où la fonction est convexe. De même, elle est en dessous là où la fonction est concave. **Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T sur $] -\infty ; 1]$ et au-dessus de T sur $[1 ; +\infty[$:** elle traverse donc sa tangente au point d'inflexion A.

Barème : a) 0,5 point pour la limite en $-\infty$, 0,5 point pour la limite en $+\infty$ (croissances comparées citées), 0,5 point pour l'asymptote ; b) 1 point pour le calcul de f' , 1 point pour le signe et le tableau avec limites et maximum ; c) 0,5 point pour f'' , 0,5 point pour le signe, 0,5 point pour la convexité, 0,5 point pour A ; d) 1 point pour l'équation, 0,5 point pour la position.

Erreur fréquente : oublier la dérivée de $-x$ dans e^{-x} . En effet, la dérivée de e^{-x} est $-e^{-x}$, pas e^{-x} .

Exercice 3 : Aire sous la courbe (5 points)

a. Pour tout $x \in [0 ; 2]$, $x + 1 \geq 1 > 0$ et $e^{-x} > 0$. **Donc $f(x) > 0$ sur $[0 ; 2]$.** Ainsi,

l'aire de $\mathcal{D}$ en unités d'aire est $\int_0^2 f(x) dx$.

b. On pose d'abord $u(x) = x + 1$ et $v'(x) = e^{-x}$, d'où $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$. De plus, les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[0 ; 2]$. Alors, par intégration par parties :

$$\int_0^2 (x + 1) e^{-x} dx = \left[-(x + 1) e^{-x} \right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x} dx.$$

$$\text{D'une part, } \left[-(x + 1) e^{-x} \right]_0^2 = -3 e^{-2} - (-1) = 1 - 3 e^{-2}.$$

$$\text{D'autre part, } \int_0^2 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^2 = -e^{-2} + 1.$$

Donc
$$\int_0^2 f(x) dx = 1 - 3e^{-2} + 1 - e^{-2}.$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 2 - 4e^{-2}.$$

c. Une unité d'aire correspond à un rectangle de 2 cm sur 4 cm, soit 8 cm^2 .

Alors $\mathcal{A} = 8 \times (2 - 4e^{-2}) = 16 - 32e^{-2} \approx 11,67$.

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est environ $11,67 \text{ cm}^2$.

d. Enfin, $m = \frac{1}{2-0} \int_0^2 f(x) dx = \frac{2-4e^{-2}}{2} = 1 - 2e^{-2}.$

La valeur moyenne de f sur $[0;2]$ est $1 - 2e^{-2} \approx 0,729$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour le choix de u et v , 0,5 point pour la formule écrite, 0,5 point pour le crochet, 0,5 point pour l'intégrale restante, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour l'unité d'aire, 0,5 point pour le résultat ; d) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour le résultat.

Erreur fréquente : prendre 1 u.a. = 4 cm^2 comme dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. Or ici l'unité d'aire vaut $2 \times 4 = 8 \text{ cm}^2$.

Exercice 4 : Un domaine qui s'étend à l'infini (5 points)

a. f est continue sur $[0; +\infty[$. Donc F , primitive de f s'annulant en 0, est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $F'(x) = f(x)$. De plus, pour $x \geq 0$, $f(x) = (x+1)e^{-x} > 0$, donc **F est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.**

b. Soit $G(x) = 2 - (x+2)e^{-x}$. G est dérivable et :

$$G'(x) = -(e^{-x} - (x+2)e^{-x}) = -(1 - x - 2)e^{-x} = (x+1)e^{-x} = f(x).$$

De plus $G(0) = 2 - 2 = 0$. G est donc la primitive de f qui s'annule en 0 : c'est F . **Pour tout $x \geq 0$, $F(x) = 2 - (x + 2)e^{-x}$.**

(On peut aussi refaire l'intégration par parties de l'exercice 3 entre 0 et x .)

Cohérence : $F(2) = 2 - 4e^{-2}$, **on retrouve donc l'intégrale de l'exercice 3.**

Questions c et d : limite de F et partage de l'aire

- c. $(x + 2)e^{-x} = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}$. Or, par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2$.

$F(x)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine sous $\mathcal{C}_f$ entre 0 et x . Ainsi, **quand x devient très grand, cette aire se rapproche de 2 u.a.** sans jamais la dépasser, bien que le domaine soit illimité.

- d. F est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, avec $F(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2$. Comme $1 \in]0; 2[$, alors, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $F(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.**

À la calculatrice : $F(1,14) \approx 0,996 < 1$ et $F(1,15) \approx 1,003 > 1$, donc $1,14 < \alpha < 1,15$.

Interprétation : **la droite d'équation $x = \alpha$ partage donc le domaine illimité situé sous $\mathcal{C}_f$, pour $x \geq 0$, en deux parties de même aire** (1 u.a. chacune).

Barème : a) 0,5 point pour $F' = f$, 0,5 point pour le sens de variation ; b) 1 point pour la dérivée et $G(0)$, 0,5 point pour la cohérence ; c) 0,5 point pour la limite, 0,5 point pour l'interprétation ; d) 0,5 point pour les hypothèses du théorème, 0,5 point pour l'encadrement, 0,5 point pour l'interprétation.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : dérivation et calcul intégral

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « [La dérivée d'une fonction](#) » en Terminale et « [Calculs d'intégrales](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [dérivée d'une fonction](#), [intégrales et primitives](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : dérivée d'une composée et variations](#)
- [Contrôle de maths Terminale : convexité et points d'inflexion](#)
- [Contrôle de maths Terminale : intégrales et intégration par parties](#)
- [Contrôle de maths Terminale : aires et valeur moyenne d'une fonction](#)