

Corrigé du contrôle de maths Terminale : dénombrement et loi binomiale

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Mains de cinq cartes	4 points
Exercice 2 : Les grilles de réponses d'un QCM	4 points
Exercice 3 : Répondre au hasard	6 points
Exercice 4 : Écrans défectueux	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Mains de cinq cartes (4 points)

- a. Une main est une combinaison de 5 cartes parmi 32. Leur nombre est donc le coefficient binomial « 5 parmi 32 » :

$$\frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{24\,165\,120}{120} = 201\,376.$$

Il y a 201 376 mains différentes.

- b. On choisit d'abord 2 as parmi les 4 (« 2 parmi 4 » = 6 façons). Ensuite, on choisit 3 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as (« 3 parmi 28 » = $\frac{28 \times 27 \times 26}{6} = 3\,276$ façons). Alors, par le principe multiplicatif :

$$6 \times 3\,276 = 19\,656.$$

19 656 mains contiennent exactement 2 as.

- c. On passe par l'événement contraire. En effet, les mains sans as sont les combinaisons de 5 cartes parmi les 28 qui ne sont pas des as, soit « 5 parmi 28 » = 98 280 .

$$\text{Donc } 201\,376 - 98\,280 = 103\,096.$$

103 096 mains contiennent au moins un as.

d. Enfin, $P = \frac{19\,656}{201\,376} \approx 0,098.$

La probabilité d'obtenir exactement 2 as est environ 0,098.

Barème : a) 0,5 point pour « combinaison », 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour le produit des deux choix, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour l'événement contraire, 0,5 point pour le résultat ; d) 1 point.

Erreur fréquente : compter $32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28$ mains. En effet, ce nombre compte les tirages ordonnés. Or, dans une main, l'ordre ne compte pas.

Exercice 2 : Les grilles de réponses d'un QCM (4 points)

- a. Une grille est un 10-uplet dont chaque terme est choisi parmi 4 réponses. Il y en a donc $4^{10} = 1\,048\,576.$

Il existe 1 048 576 grilles.

- b. On choisit d'abord les 3 questions justes parmi les 10 : « 3 parmi 10 » = $\frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$ façons. Pour chacune de ces 3 questions, une seule réponse convient. En revanche, pour chacune des 7 autres, il y a 3 réponses fausses possibles, soit $3^7 = 2\,187$ façons.

$$\text{Ainsi, } 120 \times 2\,187 = 262\,440.$$

262 440 grilles comportent exactement 3 réponses justes.

- c. Pour chacune des 10 questions, on choisit une des 3 réponses fausses. Il y a donc $3^{10} = 59\,049$ grilles.

59 049 grilles ne comportent aucune réponse juste.

- d. Les grilles sont équiprobables, donc :

$$P = \frac{262\,440}{1\,048\,576} \approx 0,250.$$

La probabilité d'avoir exactement 3 réponses justes est environ 0,250.

Barème : a) 0,5 point pour la justification (10-uplet), 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour le choix des 3 questions, 0,5 point pour 3^7 , 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point ; d) 1 point.

Exercice 3 : Répondre au hasard (6 points)

Questions a à c : arbre et loi binomiale

- a. Deux chemins de l'arbre réalisent l'événement : $R_1 \cap \overline{R_2}$ et $\overline{R_1} \cap R_2$.

$$\text{Donc } P = 0,25 \times 0,75 + 0,75 \times 0,25 = 0,1875 + 0,1875 = 0,375.$$

La probabilité cherchée est 0,375.

- b. Répondre à une question est une épreuve de Bernoulli. Son succès « la réponse est juste » a pour probabilité $\frac{1}{4} = 0,25$. De plus, cette épreuve est répétée 10 fois de façon identique et indépendante, et X compte les succès. **Ainsi, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,25)$.**
- c. $P(X = 3) = 120 \times 0,25^3 \times 0,75^7 \approx 0,250$, où 120 est le coefficient « 3 parmi 10 ».

$$P(X = 3) \approx 0,250 : \text{c'est la même valeur qu'à l'exercice 2 d. C'est normal, car}$$
$$\frac{120 \times 3^7}{4^{10}} = 120 \times \frac{1^3}{4^3} \times \frac{3^7}{4^7} = 120 \times 0,25^3 \times 0,75^7.$$

Questions d et e : être reçu au hasard et note moyenne

d. La note est $N = 2X$. Le candidat est donc reçu si $2X \geq 10$, c'est-à-dire $X \geq 5$.

Alors $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0,922 = 0,078$.

La probabilité d'être reçu en répondant au hasard est environ 0,078.

e. $E(X) = 10 \times 0,25 = 2,5$ et $V(X) = 10 \times 0,25 \times 0,75 = 1,875$.

Par linéarité, $E(N) = 2E(X) = 5$.

$E(X) = 2,5$, $V(X) = 1,875$ et $E(N) = 5$. Ainsi, un candidat qui répond au hasard obtient en moyenne **5 sur 20**, loin de la moyenne.

Barème : a) 0,5 point pour les deux chemins, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour les conditions, 0,5 point pour les paramètres ; c) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour la comparaison ; d) 0,5 point pour $X \geq 5$, 0,5 point pour le complémentaire, 0,5 point pour le résultat ; e) 0,5 point pour $E(X)$ et $V(X)$, 0,5 point pour $E(N)$, 0,5 point pour l'interprétation.

Erreur fréquente : calculer $1 - P(X \leq 5)$ pour $P(X \geq 5)$. En effet, le complémentaire de « $X \geq 5$ » est « $X \leq 4$ ».

Exercice 4 : Écrans défectueux (6 points)

Questions a à c : espérance, variance et minoration

a. $E(Y) = np = 200 \times 0,03 = 6$ et
 $V(Y) = np(1 - p) = 200 \times 0,03 \times 0,97 = 5,82$.

$$E(Y) = 6 \text{ et } V(Y) = 5,82.$$

b. La calculatrice (fonction de répartition binomiale, $n = 200$, $p = 0,03$, $k = 6$) donne :

$$P(Y \leq 6) \approx 0,606.$$

c. D'abord, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 5$:

$$P(|Y - 6| \geq 5) \leq \frac{V(Y)}{5^2} = \frac{5,82}{25} = 0,2328.$$

Or Y est un entier, donc $|Y - 6| < 5 \Leftrightarrow 1 < Y < 11 \Leftrightarrow 2 \leq Y \leq 10$. Puis, par passage à l'événement contraire :

$$P(2 \leq Y \leq 10) = 1 - P(|Y - 6| \geq 5) \geq 1 - 0,2328 = 0,7672.$$

La probabilité que le lot contienne entre 2 et 10 écrans défectueux est au moins 0,7672

.

Questions d et e : valeur exacte et taille de l'échantillon

d. $P(2 \leq Y \leq 10) = P(Y \leq 10) - P(Y \leq 1) \approx 0,944.$

$P(2 \leq Y \leq 10) \approx 0,944$, qui est bien supérieur à $0,7672$. La minoration est donc juste, mais **assez grossière**. En effet, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique à toutes les lois sans utiliser la loi binomiale.

e. $\frac{0,03 \times 0,97}{n \times 0,01^2} = \frac{0,0291}{0,0001 n} = \frac{291}{n}.$

Ensuite, $\frac{291}{n} \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{291}{0,05} = 5\,820.$

Il faut donc prélever au moins 5 820 écrans. Ainsi, la probabilité d'un écart d'au moins 0,01 entre la fréquence observée et 0,03 est majorée par 0,05.

Barème : a) 0,5 point par valeur ; b) 1 point ; c) 0,5 point pour l'inégalité appliquée, 0,5 point pour la traduction en $2 \leq Y \leq 10$, 0,5 point pour la minoration ; d) 0,5 point pour la valeur, 0,5 point pour le commentaire ; e) 0,5 point pour la simplification, 0,5 point pour la résolution, 0,5 point pour la conclusion.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : dénombrement et loi binomiale

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « [La logique combinatoire](#) » en Terminale et « [Les probabilités conditionnelles](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés probabilités**.

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : listes, permutations et arrangements](#)
- [Contrôle de maths Terminale : combinaisons et triangle de Pascal](#)
- [Contrôle de maths Terminale : épreuves indépendantes et loi binomiale](#)
- [Contrôle de maths Terminale : espérance, variance et concentration](#)