Corrigé du contrôle de maths Terminale : dénombrement et loi binomiale

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Mains de cinq cartes	4 points
Exercice 2 : Les grilles de réponses d'un QCM	4 points
Exercice 3 : Répondre au hasard	6 points
Exercice 4 : Écrans défectueux	6 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Mains de cinq cartes (4 points)

a. Une main est une combinaison de 5 cartes parmi 32. Leur nombre est donc le coefficient binomial « 5 parmi 32 » :

$$\frac{32\times 31\times 30\times 29\times 28}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=\frac{24\,165\,120}{120}=201\,376\,.$$

Il y a 201 376 mains différentes.

b. On choisit d'abord 2 as parmi les 4 (« 2 parmi 4 » $=6$ façons). Ensuite, on choisit 3 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as (« 3 parmi 28 » $=\frac{28\times 27\times 26}{6}=3\,276$ façons). Alors, par le principe multiplicatif :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$6 \times 3\,276 = 19\,656$.

19 656 mains contiennent exactement 2 as.

c. On passe par l'événement contraire. En effet, les mains sans as sont les combinaisons de 5 cartes parmi les 28 qui ne sont pas des as, soit « 5 parmi 28 » $= 98\,280$.

Donc $201\,376 - 98\,280 = 103\,096$.

103 096 mains contiennent au moins un as.

d. Enfin, $P = \frac{19\,656}{201\,376} \approx 0{,}098$.

La probabilité d'obtenir exactement 2 as est environ 0,098.

Barème : a) 0,5 point pour « combinaison », 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour le produit des deux choix, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour l'événement contraire, 0,5 point pour le résultat ; d) 1 point.

Erreur fréquente : compter $32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28$ mains. En effet, ce nombre compte les tirages ordonnés. Or, dans une main, l'ordre ne compte pas.

Exercice 2 : Les grilles de réponses d'un QCM (4 points)

a. Une grille est un 10-uplet dont chaque terme est choisi parmi 4 réponses. Il y en a donc $4^{10} = 1\,048\,576$.

Il existe 1 048 576 grilles.

b. On choisit d'abord les 3 questions justes parmi les 10 : « 3 parmi 10 » $= \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$ façons. Pour chacune de ces 3 questions, une seule réponse convient. En revanche, pour chacune des 7 autres, il y a 3 réponses fausses possibles, soit $3^7 = 2\,187$ façons.

Ainsi, $120 \times 2\,187 = 262\,440$.

262 440 grilles comportent exactement 3 réponses justes.

c. Pour chacune des 10 questions, on choisit une des 3 réponses fausses. Il y a donc $3^{10} = 59\,049$ grilles.

59 049 grilles ne comportent aucune réponse juste.

d. Les grilles sont équiprobables, donc :

$$P = \frac{262\,440}{1\,048\,576} \approx 0{,}250\,.$$

La probabilité d'avoir exactement 3 réponses justes est environ 0,250.

Barème : a) 0,5 point pour la justification (10-uplet), 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour le choix des 3 questions, 0,5 point pour 3^7, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point ; d) 1 point.

Exercice 3 : Répondre au hasard (6 points)

Questions a à c : arbre et loi binomiale

a. Deux chemins de l'arbre réalisent l'événement : $R_1 \cap \overline{R_2}$ et $\overline{R_1} \cap R_2$.

Donc $P = 0{,}25 \times 0{,}75 + 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}1875 + 0{,}1875 = 0{,}375$.

La probabilité cherchée est 0,375.

b. Répondre à une question est une épreuve de Bernoulli. Son succès « la réponse est juste » a pour probabilité $\frac{1}{4} = 0{,}25$. De plus, cette épreuve est répétée 10 fois de façon identique et indépendante, et X compte les succès. **Ainsi, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0{,}25)$.**

c. $P(X = 3) = 120 \times 0{,}25^3 \times 0{,}75^7 \approx 0{,}250$, où 120 est le coefficient « 3 parmi 10 ».

$P(X = 3) \approx 0{,}250$ **: c'est la même valeur qu'à l'exercice 2 d.** C'est normal, car $\frac{120 \times 3^7}{4^{10}} = 120 \times \frac{1^3}{4^3} \times \frac{3^7}{4^7} = 120 \times 0{,}25^3 \times 0{,}75^7$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Questions d et e : être reçu au hasard et note moyenne

d. La note est $N = 2X$. Le candidat est donc reçu si $2X \geq 10$, c'est-à-dire $X \geq 5$.

Alors $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0{,}922 = 0{,}078$.

La probabilité d'être reçu en répondant au hasard est environ 0,078.

e. $E(X) = 10 \times 0{,}25 = 2{,}5$ et $V(X) = 10 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 1{,}875$.

Par linéarité, $E(N) = 2E(X) = 5$.

$E(X) = 2{,}5$, $V(X) = 1{,}875$ **et** $E(N) = 5$**.** Ainsi, un candidat qui répond au hasard obtient en moyenne **5 sur 20**, loin de la moyenne.

Barème : a) 0,5 point pour les deux chemins, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour les conditions, 0,5 point pour les paramètres ; c) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour la comparaison ; d) 0,5 point pour $X \geq 5$ *, 0,5 point pour le complémentaire, 0,5 point pour le résultat ; e) 0,5 point pour E(X) et V(X), 0,5 point pour E(N), 0,5 point pour l'interprétation.*

Erreur fréquente : calculer $1 - P(X \leq 5)$ pour $P(X \geq 5)$. En effet, le complémentaire de « $X \geq 5$ » est « $X \leq 4$ ».

Exercice 4 : Écrans défectueux (6 points)

Questions a à c : espérance, variance et minoration

a. $E(Y) = np = 200 \times 0{,}03 = 6$ et
$V(Y) = np(1-p) = 200 \times 0{,}03 \times 0{,}97 = 5{,}82$.

$E(Y) = 6$ **et** $V(Y) = 5{,}82$**.**

b. La calculatrice (fonction de répartition binomiale, n = 200, p = 0,03, k = 6) donne :

$P(Y \leq 6) \approx 0{,}606$**.**

c. D'abord, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 5$:

$$P(|Y - 6| \geq 5) \leq \frac{V(Y)}{5^2} = \frac{5{,}82}{25} = 0{,}2328.$$

Or Y est un entier, donc $|Y - 6| < 5 \Leftrightarrow 1 < Y < 11 \Leftrightarrow 2 \leq Y \leq 10$. Puis, par passage à l'événement contraire :

$$P(2 \leq Y \leq 10) = 1 - P(|Y - 6| \geq 5) \geq 1 - 0{,}2328 = 0{,}7672\ .$$

La probabilité que le lot contienne entre 2 et 10 écrans défectueux est au moins $0{,}7672$ **.**

Questions d et e : valeur exacte et taille de l'échantillon

d. $P(2 \leq Y \leq 10) = P(Y \leq 10) - P(Y \leq 1) \approx 0{,}944$.

$P(2 \leq Y \leq 10) \approx 0{,}944$, qui est bien supérieur à $0{,}7672$. La minoration est donc juste, mais **assez grossière**. En effet, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique à toutes les lois sans utiliser la loi binomiale.

e. $\dfrac{0{,}03 \times 0{,}97}{n \times 0{,}01^2} = \dfrac{0{,}0291}{0{,}0001\,n} = \dfrac{291}{n}$.

Ensuite, $\dfrac{291}{n} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{291}{0{,}05} = 5\,820$.

Il faut donc prélever au moins 5 820 écrans. Ainsi, la probabilité d'un écart d'au moins $0{,}01$ entre la fréquence observée et $0{,}03$ est majorée par $0{,}05$.

Barème : a) 0,5 point par valeur ; b) 1 point ; c) 0,5 point pour l'inégalité appliquée, 0,5 point pour la traduction en $2 \leq Y \leq 10$*, 0,5 point pour la minoration ; d) 0,5 point pour la valeur, 0,5 point pour le commentaire ; e) 0,5 point pour la simplification, 0,5 point pour la résolution, 0,5 point pour la conclusion.*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : dénombrement et loi binomiale

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « La logique combinatoire » en Terminale et « Les probabilités conditionnelles » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** probabilités.

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP à la Terminale.

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- Contrôle de maths Terminale : listes, permutations et arrangements
- Contrôle de maths Terminale : combinaisons et triangle de Pascal
- Contrôle de maths Terminale : épreuves indépendantes et loi binomiale
- Contrôle de maths Terminale : espérance, variance et concentration