# Corrigé du contrôle de maths Terminale : convexité et points d'inflexion

**Barème du contrôle**

| Exercice | Points |
|---|---|
| Exercice 1 : Associer une fonction à ses dérivées | 4 points |
| Exercice 2 : Convexité d'une fonction polynôme | 4 points |
| Exercice 3 : Une inégalité de convexité | 4 points |
| Exercice 4 : Vrai ou faux sur la convexité | 3 points |
| Exercice 5 : Concentration d'un médicament | 5 points |
| **Total** | **20 points** |

## Exercice 1 : Associer une fonction à ses dérivées (4 points)

a. On utilise la propriété : une fonction est croissante sur un intervalle où sa dérivée est positive, et décroissante là où sa dérivée est négative.

D'abord, la droite $\mathcal{C}_3$ est négative sur $[-2{,}5\ ;\ 0]$ et positive sur $[0\ ;\ 2{,}5]$. Or la parabole $\mathcal{C}_1$ est décroissante sur $[-2{,}5\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ 2{,}5]$ : $\mathcal{C}_3$ peut donc représenter la dérivée de la fonction représentée par $\mathcal{C}_1$.

Ensuite, la parabole $\mathcal{C}_1$ est positive sur $[-2{,}5\ ;\ -1]$, négative sur $[-1\ ;\ 1]$ et positive sur $[1\ ;\ 2{,}5]$. De même, la courbe $\mathcal{C}_2$ est croissante sur $[-2{,}5\ ;\ -1]$, décroissante sur $[-1\ ;\ 1]$ et croissante sur $[1\ ;\ 2{,}5]$. Ainsi, $\mathcal{C}_1$ représente la dérivée de la fonction représentée

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

par $\mathcal{C}_2$.

Enfin $\mathcal{C}_3$ ne peut pas représenter $f$, car sa dérivée serait constante, ce qui n'est le cas d'aucune des deux autres courbes.

**$\mathcal{C}_2$ représente $f$, $\mathcal{C}_1$ représente $f'$ et $\mathcal{C}_3$ représente $f''$.**

b. ## Questions b et c : convexité et point d'inflexion

$f$ est convexe là où $f''$ est positive, concave là où elle est négative. D'après $\mathcal{C}_3$, $f''(x) \leq 0$ sur $[-2{,}5\ ;\ 0]$ et $f''(x) \geq 0$ sur $[0\ ;\ 2{,}5]$. On le retrouve d'ailleurs sur $\mathcal{C}_1$ : $f'$ est décroissante puis croissante.

**$f$ est concave sur $[-2{,}5\ ;\ 0]$ et convexe sur $[0\ ;\ 2{,}5]$.**

c. La dérivée seconde s'annule en 0 en changeant de signe, donc la courbe de $f$ change de convexité en 0. Elle admet ainsi un point d'inflexion d'abscisse 0. Puis on lit sur $\mathcal{C}_2$ que $f(0) = 0$.

**La courbe de $f$ admet un point d'inflexion : l'origine $O(0\ ;\ 0)$.**

*Barème : a) 2 points : 0,5 point par association correcte (1,5 point), 0,5 point pour une justification fondée sur le lien signe de la dérivée / variations ; b) 0,5 point par intervalle ; c) 0,5 point pour le changement de signe de $f''$, 0,5 point pour les coordonnées.*

**Erreur fréquente :** associer $f'$ à une courbe parce qu'elle « ressemble » à $f$. Seule compte la correspondance entre le signe de l'une et les variations de l'autre.

# Exercice 2 : Convexité d'une fonction polynôme (4 points)

a. $f$ est une fonction polynôme, donc dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ **et** $f''(x) = 6x - 12$.

b. $6x-12 \geq 0$ équivaut à $x \geq 2$. Donc $f''(x) \leq 0$ sur $]-\infty\,;\,2]$ et $f''(x) \geq 0$ sur $[2\,;\,+\infty[$.

**$f$ est concave sur $]-\infty\,;\,2]$ et convexe sur $[2\,;\,+\infty[$.**

c. $f''$ s'annule uniquement en 2, en changeant de signe : $\mathcal{C}_f$ admet donc un unique point d'inflexion, d'abscisse 2.

Alors $f(2) = 8-24+18+1 = 3$. **Le point d'inflexion est $A(2\,;\,3)$.**

d. $f'(2) = 12-24+9 = -3$. Ainsi, la tangente en $A$ a pour équation $y = f'(2)(x-2)+f(2)$, soit $y = -3(x-2)+3$.

$T : y = -3x+9$.

e. ## Question e : position de la courbe par rapport à T

D'une part $f(x)-(-3x+9) = x^3-6x^2+9x+1+3x-9 = x^3-6x^2+12x-8$.

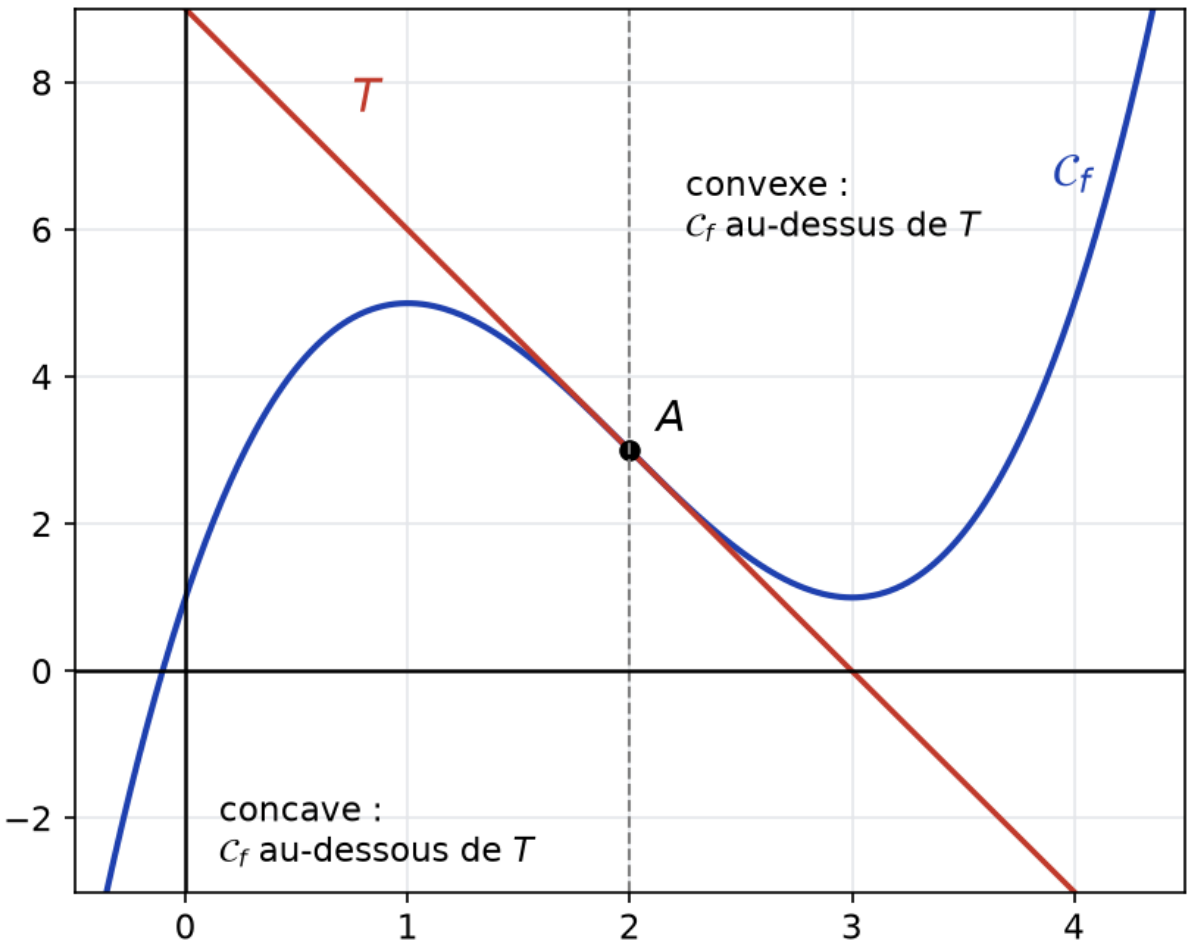
D'autre part $(x-2)^3 = x^3-3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2-2^3 = x^3-6x^2+12x-8$. L'égalité est donc vérifiée.

Or un cube a le signe de ce qu'il contient : $(x-2)^3 \leq 0$ pour $x \leq 2$ et $(x-2)^3 \geq 0$ pour $x \geq 2$.

**$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $T$ sur $]-\infty\,;\,2]$ et au-dessus de $T$ sur $[2\,;\,+\infty[$ : la courbe traverse sa tangente en $A$.**

C'était prévisible. En effet, sur $]-\infty\,;\,2]$, $f$ est concave, donc sa courbe est au-dessous de ses tangentes ; sur $[2\,;\,+\infty[$, elle est convexe, donc au-dessus. C'est ainsi la caractéristique d'un point d'inflexion.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.




*Barème : a) 0,5 point par dérivée ; b) 0,5 point pour le signe de $f''$ , 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,25 point pour le changement de signe, 0,25 point pour les coordonnées ; d) 0,5 point pour l'équation ; e) 0,5 point pour le développement, 0,25 point pour la position, 0,25 point pour le lien avec la convexité.*

## Exercice 3 : Une inégalité de convexité (4 points)

a. La fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp''(x) = e^x$ . **Comme $e^x > 0$ pour tout réel $x$, la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.**

b. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = e^0(x - 0) + e^0$. **Son équation est donc $y = x + 1$.**

c. Une fonction convexe sur un intervalle a sa courbe au-dessus de chacune de ses tangentes sur cet intervalle. La courbe de l'exponentielle est donc au-dessus de sa tangente d'équation $y = x + 1$

sur $\mathbb{R}$.

**Pour tout réel $x$, $e^x \geq 1+x$.**

d. Avec $x = \frac{1}{n}$ : $e^{\frac{1}{n}} \geq 1+\frac{1}{n}$.

Les deux membres sont strictement positifs, et la fonction $x \to x^n$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. On peut donc élever les deux membres à la puissance $n$ sans changer le sens de l'inégalité : $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Or $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = e^{n\times\frac{1}{n}} = e^1 = e$. **Pour tout entier $n \geq 1$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$.**

e. À la calculatrice : $1{,}01^{100} \approx 2{,}7048$ et $e \approx 2{,}7183$. **On a bien $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}7048 < e \approx 2{,}7183$ ; les deux nombres sont proches.**

*Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour la propriété de position par rapport aux tangentes, 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point pour la substitution, 0,5 point pour la justification du passage à la puissance $n$, 0,5 point pour le calcul de $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n$ ; e) 0,5 point.*

## Exercice 4 : Vrai ou faux sur la convexité (3 points)

a. **Affirmation 1 : vraie.** C'est en effet une propriété du cours : une fonction dérivable sur un intervalle est convexe sur cet intervalle si et seulement si sa dérivée y est croissante.

b. **Affirmation 2 : fausse.** $g'(x) = 4x^3$ et $g''(x) = 12x^2$. On a bien $g''(0) = 0$, mais $12x^2 \geq 0$ pour tout réel $x$. Ainsi, $g''$ ne change pas de signe, donc $g$ est convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier et sa courbe n'a pas de point d'inflexion. Il ne suffit pas que la dérivée seconde s'annule, il faut qu'elle change de signe.

c. **Affirmation 3 : vraie.** Par dérivation d'un produit, $k'(x) = e^x + x\,e^x = (1+x)e^x$, puis $k''(x) = e^x + (1+x)e^x = (x+2)e^x$. Sur $[-2\ ;\ +\infty[$, $x+2 \geq 0$ et $e^x > 0$, donc $k''(x) \geq 0$. Alors $k$ est convexe sur cet intervalle, et sa courbe y est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

*Barème : pour chaque affirmation, 0,25 point pour la bonne réponse et 0,75 point pour la justification (propriété citée ; contre-exemple expliqué par l'absence de changement de signe ; calcul de $k''$ et étude de son signe).*

## Exercice 5 : Concentration d'un médicament (5 points)

a. On pose $u(t) = 4t$ et $v(t) = e^{-0,5t}$, avec $u'(t) = 4$ et $v'(t) = -0,5e^{-0,5t}$.

$$f'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) = 4e^{-0,5t} + 4t \times (-0,5)e^{-0,5t} = 4e^{-0,5t} - 2t\,e^{-0,5t}.$$

$$f'(t) = (4 - 2t)e^{-0,5t}.$$

b. Comme $e^{-0,5t} > 0$, $f'(t)$ a le signe de $4 - 2t$ : positif sur $[0 ; 2]$, négatif sur $[2 ; 10]$.

Ensuite, $f(0) = 0$, $f(2) = 8e^{-1} \approx 2,94$ et $f(10) = 40e^{-5} \approx 0,27$.

| $t$ | 0 | | 2 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'(t)$ | | + | 0 | − | |
| variations de $f$ | 0 | croissante | $8e^{-1}$ | décroissante | $40e^{-5}$ |

**La concentration est maximale 2 heures après la prise ; elle vaut alors $8e^{-1} \approx 2,94$ mg/L.**

c. **Questions c et d : dérivée seconde et convexité**

On dérive $f'(t) = (4 - 2t)e^{-0,5t}$ comme un produit :

$$f''(t) = -2e^{-0,5t} + (4 - 2t) \times (-0,5)e^{-0,5t} = (-2 - 2 + t)e^{-0,5t}.$$

$$f''(t) = (t - 4)e^{-0,5t}.$$

d. $f''(t)$ a le signe de $t - 4$ : négatif sur $[0 ; 4]$, positif sur $[4 ; 10]$. **$f$ est concave sur $[0 ; 4]$ et convexe sur $[4 ; 10]$.**

De plus, $f''$ s'annule en 4 en changeant de signe, et $f(4) = 16e^{-2} \approx 2,17$. **Le point**

**d'inflexion a pour coordonnées** $(4\ ;\ 16e^{-2})$**, soit environ** $(4\ ;\ 2{,}17)$**.**

e. D'après la question d, $f''$ est négative sur $[0\ ;\ 4]$ puis positive sur $[4\ ;\ 10]$. Ainsi, $f'$ est décroissante puis croissante, elle atteint donc son minimum en $t = 4$. Sur $[2\ ;\ 10]$, $f'$ est négative, et c'est en $t = 4$ qu'elle est la plus négative : la concentration y diminue le plus vite. L'affirmation du médecin est donc justifiée.

Enfin, $f'(4) = (4-8)e^{-2} = -4e^{-2} \approx -0{,}54$. **Quatre heures après la prise, la concentration diminue d'environ** $0{,}54$ **mg/L par heure.**

*Barème : a) 0,5 point pour la formule du produit, 0,5 point pour la factorisation ; b) 0,5 point pour le signe et le tableau, 0,5 point pour l'instant et la valeur ; c) 1 point (0,5 point pour la dérivation, 0,5 point pour la factorisation) ; d) 0,5 point pour la convexité, 0,5 point pour le point d'inflexion ; e) 0,5 point pour le minimum de* $f'$*, 0,5 point pour la valeur de* $f'(4)$*.*

**Revenir à l'énoncé du contrôle**

## Après le corrigé du contrôle : convexité et points d'inflexion

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « La dérivée d'une fonction » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** dérivée d'une fonction.

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP à la Terminale.

## Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- Contrôle de maths Terminale : dérivée d'une composée et variations
- Contrôle de maths Terminale : dérivation et calcul intégral

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.