

Corrigé du contrôle de maths Terminale : convexité et points d'inflexion

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Associer une fonction à ses dérivées	4 points
Exercice 2 : Convexité d'une fonction polynôme	4 points
Exercice 3 : Une inégalité de convexité	4 points
Exercice 4 : Vrai ou faux sur la convexité	3 points
Exercice 5 : Concentration d'un médicament	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Associer une fonction à ses dérivées (4 points)

- a. On utilise la propriété : une fonction est croissante sur un intervalle où sa dérivée est positive, et décroissante là où sa dérivée est négative.

D'abord, la droite $\mathcal{C}_3$ est négative sur $[-2,5 ; 0]$ et positive sur $[0 ; 2,5]$. Or la parabole $\mathcal{C}_1$ est décroissante sur $[-2,5 ; 0]$ et croissante sur $[0 ; 2,5]$: $\mathcal{C}_3$ peut donc représenter la dérivée de la fonction représentée par $\mathcal{C}_1$.

Ensuite, la parabole $\mathcal{C}_1$ est positive sur $[-2,5 ; -1]$, négative sur $[-1 ; 1]$ et positive sur $[1 ; 2,5]$. De même, la courbe $\mathcal{C}_2$ est croissante sur $[-2,5 ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; 2,5]$. Ainsi, $\mathcal{C}_1$ représente la dérivée de la fonction représentée

par $\mathcal{C}_2$.

Enfin $\mathcal{C}_3$ ne peut pas représenter f , car sa dérivée serait constante, ce qui n'est le cas d'aucune des deux autres courbes.

$\mathcal{C}_2$ représente f , $\mathcal{C}_1$ représente f' et $\mathcal{C}_3$ représente f'' .

b. Questions b et c : convexité et point d'inflexion

f est convexe là où f'' est positive, concave là où elle est négative. D'après $\mathcal{C}_3$,
 $f''(x) \leq 0$ sur $[-2,5 ; 0]$ et $f''(x) \geq 0$ sur $[0 ; 2,5]$. On le retrouve d'ailleurs sur $\mathcal{C}_1$: f' est décroissante puis croissante.

f est concave sur $[-2,5 ; 0]$ et convexe sur $[0 ; 2,5]$.

- c. La dérivée seconde s'annule en 0 en changeant de signe, donc la courbe de f change de convexité en 0. Elle admet ainsi un point d'inflexion d'abscisse 0. Puis on lit sur $\mathcal{C}_2$ que $f(0) = 0$.

La courbe de f admet un point d'inflexion : l'origine $O(0 ; 0)$.

Barème : a) 2 points : 0,5 point par association correcte (1,5 point), 0,5 point pour une justification fondée sur le lien signe de la dérivée / variations ; b) 0,5 point par intervalle ; c) 0,5 point pour le changement de signe de f'' , 0,5 point pour les coordonnées.

Erreur fréquente : associer f' à une courbe parce qu'elle « ressemble » à f . Seule compte la correspondance entre le signe de l'une et les variations de l'autre.

Exercice 2 : Convexité d'une fonction polynôme (4 points)

- a. f est une fonction polynôme, donc dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \text{ et } f''(x) = 6x - 12.$$

- b. $6x - 12 \geq 0$ équivaut à $x \geq 2$. Donc $f''(x) \leq 0$ sur $] -\infty ; 2]$ et $f''(x) \geq 0$ sur $[2 ; +\infty[$.

f est concave sur $] -\infty ; 2]$ et convexe sur $[2 ; +\infty[$.

- c. f'' s'annule uniquement en 2, en changeant de signe : $\mathcal{C}_f$ admet donc un unique point d'inflexion, d'abscisse 2.

Alors $f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$. **Le point d'inflexion est $A(2 ; 3)$.**

- d. $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$. Ainsi, la tangente en A a pour équation $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit $y = -3(x - 2) + 3$.

$$T : y = -3x + 9.$$

e. **Question e : position de la courbe par rapport à T**

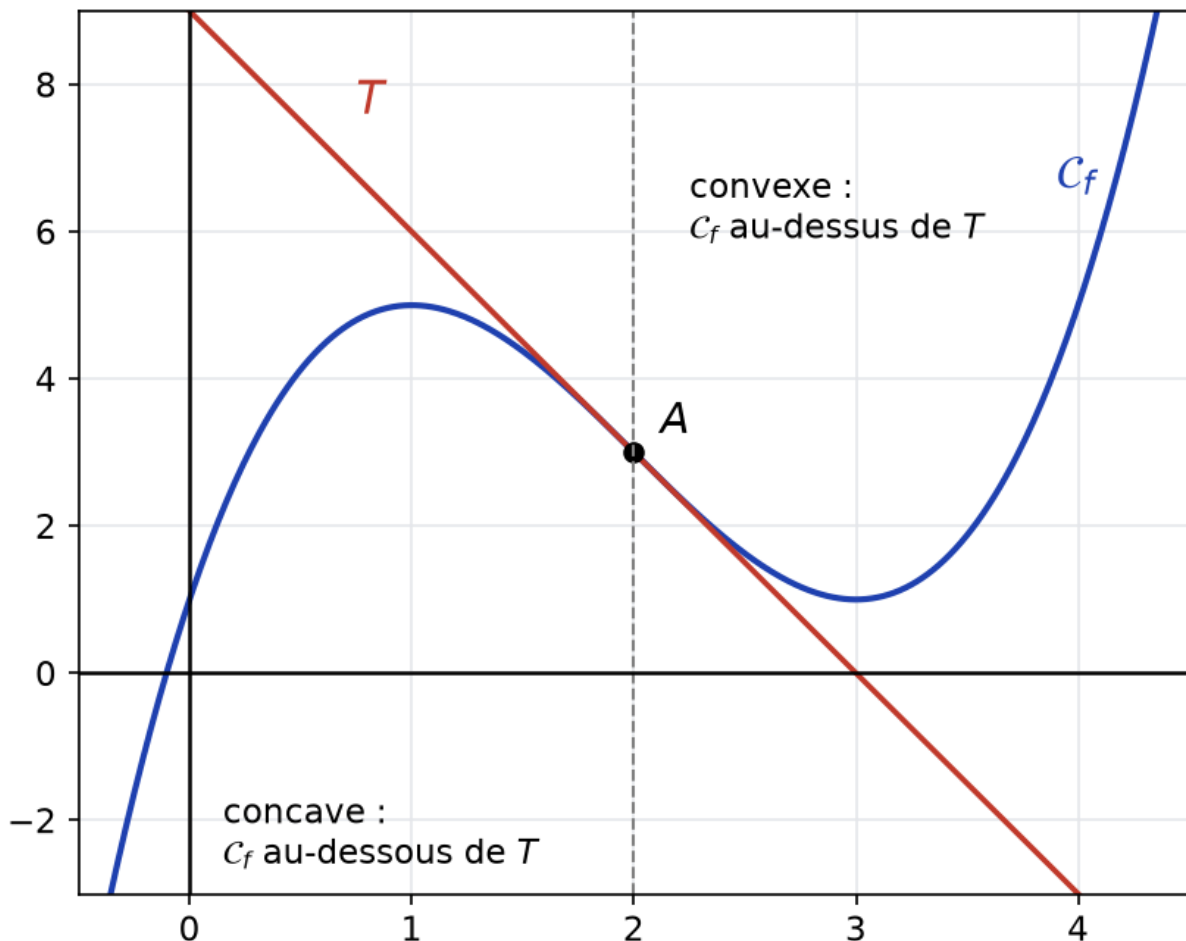
D'une part $f(x) - (-3x + 9) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 + 3x - 9 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

D'autre part $(x - 2)^3 = x^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
L'égalité est donc vérifiée.

Or un cube a le signe de ce qu'il contient : $(x - 2)^3 \leq 0$ pour $x \leq 2$ et $(x - 2)^3 \geq 0$ pour $x \geq 2$.

$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T sur $] -\infty ; 2]$ et au-dessus de T sur $[2 ; +\infty[$: la courbe traverse sa tangente en A .

C'était prévisible. En effet, sur $] -\infty ; 2]$, f est concave, donc sa courbe est au-dessous de ses tangentes ; sur $[2 ; +\infty[$, elle est convexe, donc au-dessus. C'est ainsi la caractéristique d'un point d'inflexion.



Barème : a) 0,5 point par dérivée ; b) 0,5 point pour le signe de f'' , 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,25 point pour le changement de signe, 0,25 point pour les coordonnées ; d) 0,5 point pour l'équation ; e) 0,5 point pour le développement, 0,25 point pour la position, 0,25 point pour le lien avec la convexité.

Exercice 3 : Une inégalité de convexité (4 points)

- La fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp''(x) = e^x$. **Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.**
- La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = e^0(x - 0) + e^0$. **Son équation est donc $y = x + 1$.**
- Une fonction convexe sur un intervalle a sa courbe au-dessus de chacune de ses tangentes sur cet intervalle. La courbe de l'exponentielle est donc au-dessus de sa tangente d'équation $y = x + 1$

sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$.

d. Avec $x = \frac{1}{n}$: $e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$.

Les deux membres sont strictement positifs, et la fonction $x \rightarrow x^n$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$. On peut donc élever les deux membres à la puissance n sans changer le sens de l'inégalité : $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Or $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = e^{n \times \frac{1}{n}} = e^1 = e$. **Pour tout entier $n \geq 1$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.**

e. À la calculatrice : $1,01^{100} \approx 2,7048$ et $e \approx 2,7183$. **On a bien**
 $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2,7048 < e \approx 2,7183$; **les deux nombres sont proches.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour la propriété de position par rapport aux tangentes, 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point pour la substitution, 0,5 point pour la justification du passage à la puissance n , 0,5 point pour le calcul de $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n$; e) 0,5 point.

Exercice 4 : Vrai ou faux sur la convexité (3 points)

- a. **Affirmation 1 : vraie.** C'est en effet une propriété du cours : une fonction dérivable sur un intervalle est convexe sur cet intervalle si et seulement si sa dérivée y est croissante.
- b. **Affirmation 2 : fausse.** $g'(x) = 4x^3$ et $g''(x) = 12x^2$. On a bien $g''(0) = 0$, mais $12x^2 \geq 0$ pour tout réel x . Ainsi, g'' ne change pas de signe, donc g est convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier et sa courbe n'a pas de point d'inflexion. Il ne suffit pas que la dérivée seconde s'annule, il faut qu'elle change de signe.
- c. **Affirmation 3 : vraie.** Par dérivation d'un produit, $k'(x) = e^x + x e^x = (1 + x)e^x$, puis $k''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (x + 2)e^x$. Sur $[-2 ; +\infty[$, $x + 2 \geq 0$ et $e^x > 0$, donc $k''(x) \geq 0$. Alors k est convexe sur cet intervalle, et sa courbe y est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Barème : pour chaque affirmation, 0,25 point pour la bonne réponse et 0,75 point pour la justification (propriété citée ; contre-exemple expliqué par l'absence de changement de signe ; calcul de k'' et étude de son signe).

Exercice 5 : Concentration d'un médicament (5 points)

a. On pose $u(t) = 4t$ et $v(t) = e^{-0,5t}$, avec $u'(t) = 4$ et $v'(t) = -0,5e^{-0,5t}$.

$$f'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) = 4e^{-0,5t} + 4t \times (-0,5)e^{-0,5t} = 4e^{-0,5t} - 2te^{-0,5t}.$$

$$f'(t) = (4 - 2t)e^{-0,5t}.$$

b. Comme $e^{-0,5t} > 0$, $f'(t)$ a le signe de $4 - 2t$: positif sur $[0 ; 2]$, négatif sur $[2 ; 10]$.

Ensuite, $f(0) = 0$, $f(2) = 8e^{-1} \approx 2,94$ et $f(10) = 40e^{-5} \approx 0,27$.

t	0		2		10
signe de $f'(t)$		+	0	-	
variations de f	0	croissante	$8e^{-1}$	décroissante	$40e^{-5}$

La concentration est maximale 2 heures après la prise ; elle vaut alors $8e^{-1} \approx 2,94$ mg/L.

c. Questions c et d : dérivée seconde et convexité

On dérive $f'(t) = (4 - 2t)e^{-0,5t}$ comme un produit :

$$f''(t) = -2e^{-0,5t} + (4 - 2t) \times (-0,5)e^{-0,5t} = (-2 - 2 + t)e^{-0,5t}.$$

$$f''(t) = (t - 4)e^{-0,5t}.$$

d. $f''(t)$ a le signe de $t - 4$: négatif sur $[0 ; 4]$, positif sur $[4 ; 10]$. **f est concave sur $[0 ; 4]$ et convexe sur $[4 ; 10]$.**

De plus, f'' s'annule en 4 en changeant de signe, et $f(4) = 16e^{-2} \approx 2,17$. **Le point**

d'inflexion a pour coordonnées $(4 ; 16e^{-2})$, soit environ $(4 ; 2,17)$.

e. D'après la question d, f'' est négative sur $[0 ; 4]$ puis positive sur $[4 ; 10]$. Ainsi, f' est décroissante puis croissante, elle atteint donc son minimum en $t = 4$. Sur $[2 ; 10]$, f' est négative, et c'est en $t = 4$ qu'elle est la plus négative : la concentration y diminue le plus vite. L'affirmation du médecin est donc justifiée.

Enfin, $f'(4) = (4 - 8)e^{-2} = -4e^{-2} \approx -0,54$. **Quatre heures après la prise, la concentration diminue d'environ 0,54 mg/L par heure.**

Barème : a) 0,5 point pour la formule du produit, 0,5 point pour la factorisation ; b) 0,5 point pour le signe et le tableau, 0,5 point pour l'instant et la valeur ; c) 1 point (0,5 point pour la dérivation, 0,5 point pour la factorisation) ; d) 0,5 point pour la convexité, 0,5 point pour le point d'inflexion ; e) 0,5 point pour le minimum de f' , 0,5 point pour la valeur de $f'(4)$.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : convexité et points d'inflexion

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours [« La dérivée d'une fonction » en Terminale](#) puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [dérivée d'une fonction](#).

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : dérivée d'une composée et variations](#)
- [Contrôle de maths Terminale : dérivation et calcul intégral](#)