

Corrigé du contrôle de maths Terminale : continuité et valeurs intermédiaires

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Continuité d'une fonction définie par morceaux	4 points
Exercice 2 : Lire un tableau de variations	3 points
Exercice 3 : Une solution unique et son encadrement	5 points
Exercice 4 : Méthode de dichotomie en Python	4 points
Exercice 5 : La vitesse d'un parachutiste	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Continuité d'une fonction définie par morceaux (4 points)

a. Pour $x \neq 2$, on factorise d'abord le numérateur : $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, donc

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$. Pour $x \neq 2$, $f(x) = x + 2$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

b. f est continue en 2 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, c'est-à-dire $4 = a$. f est continue en 2 pour $a = 4$.

c. Pour $x < 0$, $g(x) = e^x + m$, et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$. Donc la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures est $1 + m$.

Par ailleurs $g(0) = 0^2 + 3 = 3$, et la limite à droite de g en 0 vaut aussi 3.

Ainsi, g est continue en 0 si et seulement si $1 + m = 3$. **g est continue en 0 pour $m = 2$.**

d. Sur $] -\infty ; 0[$, $g(x) = e^x + 2$ est continue comme somme de fonctions continues. De plus, sur $] 0 ; +\infty[$, $g(x) = x^2 + 3$ est continue comme fonction polynôme. Enfin g est continue en 0 d'après c. **Pour $m = 2$, g est continue sur $\mathbb{R}$.**

Barème : a) 0,5 point pour la factorisation, 0,5 point pour la limite ; b) 0,5 point pour la condition de continuité, 0,5 point pour la valeur ; c) 0,5 point pour la limite à gauche, 0,5 point pour $g(0)$, 0,5 point pour m ; d) 0,5 point.

Erreur fréquente : remplacer x par 2 dans $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ et conclure que la limite « n'existe pas ». En effet, la forme $\frac{0}{0}$ est indéterminée, donc on la lève en factorisant.

Exercice 2 : Lire un tableau de variations (3 points)

a. Sur $[-3 ; 0]$, f est continue et strictement décroissante, et 0 est compris entre $f(0) = -2$ et $f(-3) = 4$. Alors, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution dans $] -3 ; 0[$.

Ensuite, sur $[0 ; 3]$, f est continue et strictement croissante, et 0 est compris entre -2 et 5 : une unique solution dans $] 0 ; 3[$.

Enfin, sur $[3 ; 5]$, le minimum de f est $f(5) = 1 > 0$: pas de solution.

L'équation $f(x) = 0$ a exactement 2 solutions, l'une dans $] -3 ; 0[$, l'autre dans $] 0 ; 3[$.

b. Même raisonnement, car f est continue et strictement monotone sur chacun des trois intervalles.

Ainsi, 3 est compris entre -2 et 4 (une solution dans $] -3 ; 0[$), puis entre -2 et 5 (une solution dans $] 0 ; 3[$), et entre 1 et 5 (une solution dans $] 3 ; 5[$).

L'équation $f(x) = 3$ a exactement 3 solutions, une dans chacun des intervalles $] -3 ; 0[$, $] 0 ; 3[$ et $] 3 ; 5[$.

- c. Le maximum de f sur $[-3 ; 5]$ est $f(3) = 5$. Donc, pour tout x de $[-3 ; 5]$, $f(x) \leq 5 < 6$. **L'équation $f(x) = 6$ n'a aucune solution.**

Barème : a) 0,25 point par intervalle étudié et 0,25 point pour la conclusion ; b) 0,75 point pour les trois intervalles justifiés, 0,25 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour le maximum, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 3 : Une solution unique et son encadrement (5 points)

- a. $g'(x) = 3x^2 + 1$. Pour tout réel x , $3x^2 \geq 0$, donc $g'(x) \geq 1 > 0$. g est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .
- b. En $+\infty$, x^3 et x tendent vers $+\infty$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; de même, en $-\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.
- c. g est continue (fonction polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Or 3 est compris entre ces limites. Ainsi, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation $g(x) = 3$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

De plus $g(1) = 2 < 3$ et $g(2) = 10 > 3$. Comme g est strictement croissante, $g(1) < g(\alpha) < g(2)$ entraîne $1 < \alpha < 2$.

- d. À la calculatrice : $g(1,2) = 2,928 < 3$ et $g(1,3) = 3,497 > 3$, donc $1,2 < \alpha < 1,3$.

Puis $g(1,21) = 2,981561 < 3$ et $g(1,22) = 3,035848 > 3$.

$1,2 < \alpha < 1,3$ **et** $1,21 < \alpha < 1,22$.

- e. g est strictement croissante et $g(\alpha) = 3$. Donc si $x < \alpha$, alors $g(x) < 3$; si $x > \alpha$,

alors $g(x) > 3$.

$g(x) - 3 < 0$ sur $] -\infty ; \alpha[$, $g(x) - 3 = 0$ pour $x = \alpha$, et $g(x) - 3 > 0$ sur $]\alpha ; +\infty[$.

Barème : a) 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour son signe et les variations ; b) 0,25 point par limite ; c) 1 point pour le corollaire avec ses trois hypothèses, 0,5 point pour l'encadrement entre 1 et 2 ; d) 0,5 point par encadrement ; e) 1 point.

Exercice 4 : Méthode de dichotomie en Python (4 points)

- a. h est dérivable sur $[0 ; 1]$ et $h'(x) = e^x + 1 > 0$. Ainsi, h est continue et strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

De plus, $h(0) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0$ et $h(1) = e - 1 \approx 1,718 > 0$. Or 0 est compris entre $h(0)$ et $h(1)$. Donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne :

l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[0 ; 1]$.

- b. On répète tant que l'intervalle est trop large. Si $h(m) < 0$, la solution est à droite de m (car h est croissante), sinon elle est à gauche.

```
while b - a > p :  
    m = (a + b) / 2  
    if h(m) < 0 :  
        a = m  
    else:  
        b = m
```

Les trois lignes sont : while b - a > p, if h(m) < 0 et b = m.

c.

Passage	a	b	m	$h(m)$	nouvel intervalle
1	0	1	0,5	0,149	$[0 ; 0,5]$
2	0	0,5	0,25	-0,466	$[0,25 ; 0,5]$

3	0,25	0,5	0,375	-0,170	[0,375 ; 0,5]
---	------	-----	-------	--------	---------------

Au passage 1, $h(0,5) > 0$, donc b prend la valeur 0,5. Puis, aux passages 2 et 3, $h(m) < 0$, donc a prend la valeur de m .

Après trois passages : $0,375 \leq \beta \leq 0,5$.

Barème : a) 0,5 point pour la stricte monotonie, 0,5 point pour les signes de $h(0)$ et $h(1)$, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point par ligne ; c) 0,25 point par ligne du tableau, 0,25 point pour l'encadrement final.

Exercice 5 : La vitesse d'un parachutiste (4 points)

a. $v(t) = 50 - 50e^{-0,2t}$, donc $v'(t) = -50 \times (-0,2)e^{-0,2t} = 10e^{-0,2t}$.

Or une exponentielle est strictement positive, donc $v'(t) > 0$. **La vitesse v est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.**

b. Quand t tend vers $+\infty$, $-0,2t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,2t}$ tend vers 0 (limite d'une composée). $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 50$: **la vitesse se stabilise à long terme autour de 50 m/s.**

c. v est continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec $v(0) = 50(1 - 1) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 50$. Puisque 40 est compris entre 0 et 50, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique. Ainsi, **l'équation $v(t) = 40$ admet une unique solution t_0 dans $[0 ; +\infty[$.**

d. À la calculatrice : $v(8,04) \approx 39,986 < 40$ et $v(8,05) \approx 40,006 > 40$. $8,04 < t_0 < 8,05$: **Nadia atteint 40 m/s au bout d'environ 8 secondes.**

e. Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,2t} > 0$, donc $1 - e^{-0,2t} < 1$ et $v(t) < 50$. **Nadia n'atteint jamais 50 m/s : elle s'en approche seulement.**

Barème : a) 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour les variations ; b) 0,25 point pour la limite, 0,25 point

pour l'interprétation ; c) 1 point pour les hypothèses (continuité, stricte monotonie, valeurs 0 et 50), 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point ; e) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : continuité et valeurs intermédiaires

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « [Fonction continue](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [continuité et théorème des valeurs intermédiaires](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale](#) classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : suites récurrentes et continuité](#)