Corrigé du contrôle de maths Terminale : continuité et valeurs intermédiaires

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Continuité d'une fonction définie par morceaux	4 points
Exercice 2 : Lire un tableau de variations	3 points
Exercice 3 : Une solution unique et son encadrement	5 points
Exercice 4 : Méthode de dichotomie en Python	4 points
Exercice 5 : La vitesse d'un parachutiste	4 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Continuité d'une fonction définie par morceaux (4 points)

a. Pour $x \neq 2$, on factorise d'abord le numérateur : $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, donc $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$. **Pour** $x \neq 2$, $f(x) = x+2$ **et** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

b. f est continue en 2 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, c'est-à-dire $4 = a$. f **est continue en 2 pour** $a = 4$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

c. Pour $x < 0$, $g(x) = e^x + m$, et $\lim\limits_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$. Donc la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures est $1 + m$.

Par ailleurs $g(0) = 0^2 + 3 = 3$, et la limite à droite de g en 0 vaut aussi 3.

Ainsi, g est continue en 0 si et seulement si $1 + m = 3$. **g est continue en 0 pour $m = 2$.**

d. Sur $]-\infty\,;\,0[$, $g(x) = e^x + 2$ est continue comme somme de fonctions continues. De plus, sur $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) = x^2 + 3$ est continue comme fonction polynôme. Enfin g est continue en 0 d'après c. **Pour $m = 2$, g est continue sur $\mathbb{R}$.**

Barème : a) 0,5 point pour la factorisation, 0,5 point pour la limite ; b) 0,5 point pour la condition de continuité, 0,5 point pour la valeur ; c) 0,5 point pour la limite à gauche, 0,5 point pour $g(0)$, 0,5 point pour m ; d) 0,5 point.

Erreur fréquente : remplacer x par 2 dans $\frac{x^2-4}{x-2}$ et conclure que la limite « n'existe pas ». En effet, la forme $\frac{0}{0}$ est indéterminée, donc on la lève en factorisant.

Exercice 2 : Lire un tableau de variations (3 points)

a. Sur $[-3\,;\,0]$, f est continue et strictement décroissante, et 0 est compris entre $f(0) = -2$ et $f(-3) = 4$. Alors, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution dans $]-3\,;\,0[$.

Ensuite, sur $[0\,;\,3]$, f est continue et strictement croissante, et 0 est compris entre -2 et 5 : une unique solution dans $]0\,;\,3[$.

Enfin, sur $[3\,;\,5]$, le minimum de f est $f(5) = 1 > 0$: pas de solution.

L'équation $f(x) = 0$ a exactement 2 solutions, l'une dans $]-3\,;\,0[$, l'autre dans $]0\,;\,3[$.

b. Même raisonnement, car f est continue et strictement monotone sur chacun des trois intervalles.

Ainsi, 3 est compris entre -2 et 4 (une solution dans $]-3\,;\,0[$), puis entre -2 et 5 (une solution dans $]0\,;\,3[$), et entre 1 et 5 (une solution dans $]3\,;\,5[$).

L'équation $f(x)=3$ a exactement 3 solutions, une dans chacun des intervalles $]-3\,;\,0[$, $]0\,;\,3[$ et $]3\,;\,5[$.

c. Le maximum de f sur $[-3\,;\,5]$ est $f(3)=5$. Donc, pour tout x de $[-3\,;\,5]$, $f(x)\leq 5<6$. **L'équation $f(x)=6$ n'a aucune solution.**

Barème : a) 0,25 point par intervalle étudié et 0,25 point pour la conclusion ; b) 0,75 point pour les trois intervalles justifiés, 0,25 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour le maximum, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 3 : Une solution unique et son encadrement (5 points)

a. $g'(x)=3x^2+1$. Pour tout réel x, $3x^2\geq 0$, donc $g'(x)\geq 1>0$. **g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

b. En $+\infty$, x^3 et x tendent vers $+\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$; de même, en $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

c. g est continue (fonction polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. Or 3 est compris entre ces limites. Ainsi, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation $g(x)=3$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

De plus $g(1)=2<3$ et $g(2)=10>3$. Comme g est strictement croissante, $g(1)<g(\alpha)<g(2)$ entraîne $1<\alpha<2$.

d. À la calculatrice : $g(1{,}2)=2{,}928<3$ et $g(1{,}3)=3{,}497>3$, donc $1{,}2<\alpha<1{,}3$.

Puis $g(1{,}21)=2{,}981561<3$ et $g(1{,}22)=3{,}035848>3$.

$1{,}2<\alpha<1{,}3$ **et** $1{,}21<\alpha<1{,}22$.

e. g est strictement croissante et $g(\alpha)=3$. Donc si $x<\alpha$, alors $g(x)<3$; si $x>\alpha$,

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

alors $g(x) > 3$.

$g(x) - 3 < 0$ **sur** $]-\infty\,;\,\alpha[$, $g(x) - 3 = 0$ **pour** $x = \alpha$ **, et** $g(x) - 3 > 0$ **sur** $]\alpha\,;\,+\infty[$ **.**

Barème : a) 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour son signe et les variations ; b) 0,25 point par limite ; c) 1 point pour le corollaire avec ses trois hypothèses, 0,5 point pour l'encadrement entre 1 et 2 ; d) 0,5 point par encadrement ; e) 1 point.

Exercice 4 : Méthode de dichotomie en Python (4 points)

a. h est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et $h'(x) = e^x + 1 > 0$. Ainsi, h est continue et strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

De plus, $h(0) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0$ et $h(1) = e - 1 \approx 1{,}718 > 0$. Or 0 est compris entre $h(0)$ et $h(1)$. Donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne : **l'équation** $h(x) = 0$ **admet une unique solution** β **dans** $[0\,;\,1]$ **.**

b. On répète tant que l'intervalle est trop large. Si $h(m) < 0$, la solution est à droite de m (car h est croissante), sinon elle est à gauche.

```
    while b - a > p :
m = (a + b) / 2
if h(m) < 0 :
a = m
else:
b = m
```

Les trois lignes sont : `while b - a > p`, `if h(m) < 0` et `b = m`.

c.

Passage	a	b	m	$h(m)$	nouvel intervalle
1	0	1	0,5	0,149	$[0\,;\,0{,}5]$
2	0	0,5	0,25	−0,466	$[0{,}25\,;\,0{,}5]$

3	0,25	0,5	0,375	$-0{,}170$	$[0{,}375\ ;\ 0{,}5]$

Au passage 1, $h(0{,}5) > 0$, donc b prend la valeur $0{,}5$. Puis, aux passages 2 et 3, $h(m) < 0$, donc a prend la valeur de m.

Après trois passages : $0{,}375 \leq \beta \leq 0{,}5$**.**

Barème : a) 0,5 point pour la stricte monotonie, 0,5 point pour les signes de $h(0)$ et $h(1)$, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point par ligne ; c) 0,25 point par ligne du tableau, 0,25 point pour l'encadrement final.

Exercice 5 : La vitesse d'un parachutiste (4 points)

a. $v(t) = 50 - 50e^{-0{,}2t}$, donc $v'(t) = -50 \times (-0{,}2)e^{-0{,}2t} = 10e^{-0{,}2t}$.

Or une exponentielle est strictement positive, donc $v'(t) > 0$. **La vitesse v est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.**

b. Quand t tend vers $+\infty$, $-0{,}2t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0{,}2t}$ tend vers 0 (limite d'une composée). $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 50$ **: la vitesse se stabilise à long terme autour de 50 m/s.**

c. v est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, avec $v(0) = 50(1-1) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 50$. Puisque 40 est compris entre 0 et 50, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique. Ainsi, **l'équation $v(t) = 40$ admet une unique solution t_0 dans $[0\ ;\ +\infty[$.**

d. À la calculatrice : $v(8{,}04) \approx 39{,}986 < 40$ et $v(8{,}05) \approx 40{,}006 > 40$. $8{,}04 < t_0 < 8{,}05$ **: Nadia atteint 40 m/s au bout d'environ 8 secondes.**

e. Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0{,}2t} > 0$, donc $1 - e^{-0{,}2t} < 1$ et $v(t) < 50$. **Nadia n'atteint jamais 50 m/s : elle s'en approche seulement.**

Barème : a) 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour les variations ; b) 0,25 point pour la limite, 0,25 point

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

pour l'interprétation ; c) 1 point pour les hypothèses (continuité, stricte monotonie, valeurs 0 et 50), 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point ; e) 0,5 point.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : continuité et valeurs intermédiaires

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « Fonction continue » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** continuité et théorème des valeurs intermédiaires.

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP à la Terminale.

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- Contrôle de maths Terminale : suites récurrentes et continuité