Corrigé du contrôle de maths Terminale : combinaisons et triangle de Pascal

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Calculer des combinaisons	4 points
Exercice 2 : Le triangle de Pascal	4 points
Exercice 3 : Démontrer la relation de Pascal	4 points
Exercice 4 : Mains de cinq cartes	4 points
Exercice 5 : Le bon modèle de dénombrement	4 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Calculer des combinaisons (4 points)

a. D'abord, $C(6,2) = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$.

Ensuite, $C(7,3) = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{6 \times 4!} = 7 \times 5 = 35$.

Ainsi, $C(6,2) = 15$ **et** $C(7,3) = 35$**.**

b. Il y a une seule partie vide et 10 parties à un élément. De plus, il existe une seule partie à 10 éléments (l'ensemble lui-même). **Donc** $C(10,0) = 1$**,** $C(10,1) = 10$ **et** $C(10,10) = 1$**.**

c. Par symétrie, $C(n,k) = C(n,n-k)$. En effet, choisir les 18 éléments retenus revient à choisir

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

les 2 éléments écartés. Donc $C(20,18) = C(20,2) = \frac{20 \times 19}{2} = 190$. $C(20,18) = 190$.

d. On a $C(n,2) = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2 \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Or une poignée de main correspond à une paire de personnes. C'est-à-dire une partie à 2 éléments de l'ensemble des 30 personnes : $C(30,2) = \frac{30 \times 29}{2} = 435$. **Ainsi, 435 poignées de main sont échangées.**

Barème : a) 0,75 point par combinaison (0,5 point pour la simplification, 0,25 point pour le résultat) ; b) 0,5 point pour les trois valeurs ; c) 0,5 point pour la symétrie, 0,5 point pour le résultat ; d) 0,5 point pour la démonstration, 0,5 point pour les 435 poignées de main.

Exercice 2 : Le triangle de Pascal (4 points)

a. Chaque nombre s'obtient ainsi : on ajoute le nombre situé au-dessus et celui situé au-dessus à gauche.

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	5	**10**	**10**	5	1		
6	1	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	1	
7	1	7	**21**	**35**	**35**	**21**	7	1

b. Relation de Pascal : pour $1 \leq k \leq n$, $C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$.

Par exemple, $C(6,3) = C(5,2) + C(5,3) = 10 + 10 = 20$. **C'est donc la relation de Pascal qui permet de compléter chaque ligne à partir de la précédente.**

c. On lit d'abord $C(7,3) = 35$.

Puis on fait la somme de la ligne 7 : $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128$. **Ainsi,** $C(7,3) = 35$ **et la somme de la ligne 7 vaut 128, c'est-à-dire** 2^7**.**

d. La somme $C(n,0) + C(n,1) + \text{etc.} + C(n,n)$ compte les parties d'un ensemble à n

éléments ayant 0 élément, puis 1 élément, et ainsi de suite jusqu'à n éléments. Elle compte donc toutes les parties de cet ensemble, une et une seule fois. Or un ensemble à n éléments possède 2^n parties. En effet, pour chaque élément, on décide s'il appartient ou non à la partie. **Par conséquent, la somme des nombres de la ligne n est égale à 2^n.**

Barème : a) 0,5 point par ligne complétée sans erreur ; b) 0,25 point pour la relation, 0,25 point pour l'exemple ; c) 0,5 point pour la lecture, 0,5 point pour la somme ; d) 0,5 point pour l'interprétation de la somme, 0,5 point pour le nombre de parties.

Exercice 3 : Démontrer la relation de Pascal (4 points)

a. Une partie à k éléments qui contient a est déterminée par ses $k-1$ autres éléments. Ceux-ci sont choisis parmi les n éléments de E différents de a. **Il y en a donc $C(n, k-1)$.**

b. De même, une partie à k éléments qui ne contient pas a est formée de k éléments choisis parmi les n éléments différents de a. **Il y en a donc $C(n, k)$.**

c. Une partie de E à k éléments contient a ou ne le contient pas, mais jamais les deux. Ainsi, les deux cas sont disjoints et couvrent toutes les parties. Par le principe additif, le nombre total de parties de E à k éléments est donc la somme des deux nombres trouvés. Or ce nombre total vaut $C(n+1, k)$. $C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$.

d. On applique alors la relation avec $n = 9$ et $k = 5$:
$C(10, 5) = C(9, 4) + C(9, 5) = 126 + 126$. **Finalement,** $C(10, 5) = 252$.

Barème : a) 0,5 point pour le raisonnement, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour le raisonnement, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour la disjonction des cas, 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point pour l'application de la relation, 0,5 point pour le résultat.

Erreur fréquente : en a), répondre $C(n+1, k-1)$ en oubliant que a est déjà choisi. En effet, les autres éléments se choisissent parmi n éléments seulement.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 4 : Mains de cinq cartes (4 points)

a. Une main est une partie à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes : c'est donc une combinaison.

$C(32,5) = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{24\,165\,120}{120} = 201\,376$. **Ainsi, Julien peut obtenir** $201\,376$ **mains.**

b. On choisit d'abord 2 as parmi les 4. Puis, indépendamment, on choisit 3 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as.

$C(4,2) = 6$ et $C(28,3) = \frac{28 \times 27 \times 26}{6} = 3\,276$. Par le principe multiplicatif : $6 \times 3\,276 = 19\,656$. **Donc** $19\,656$ **mains contiennent exactement 2 as.**

c. Ici, les 5 cartes sont choisies parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as.

$C(28,5) = \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24}{120} = 98\,280$. **Ainsi,** $98\,280$ **mains ne contiennent aucun as.**

d. « Au moins un as » est le contraire de « aucun as » : $201\,376 - 98\,280 = 103\,096$.

Puisque les mains sont équiprobables, la probabilité est $\frac{103\,096}{201\,376} \approx 0{,}51$. **Donc** $103\,096$ **mains contiennent au moins un as. La probabilité d'en obtenir une est environ** $0{,}51$ **.**

Barème : a) 0,5 point pour le modèle, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour la décomposition, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour le choix parmi 28, 0,5 point pour le résultat ; d) 0,5 point pour le complémentaire, 0,5 point pour la probabilité.

Exercice 5 : Le bon modèle de dénombrement (4 points)

a. Les membres du comité n'ont pas de fonction : l'ordre ne compte pas et il n'y a pas de répétition. C'est donc une **combinaison**.

$C(12,4) = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{11\,880}{24} = 495$. **Il y a 495 comités possibles.**

b. On utilise deux **combinaisons** : 2 filles parmi 7 et 2 garçons parmi 5. Ensuite, on applique le principe multiplicatif.

$C(7,2) \times C(5,2) = 21 \times 10 = 210$. **Ainsi, 210 comités comprennent exactement 2 filles et 2 garçons.**

c. Les fonctions sont différentes, donc l'ordre compte. De plus, un membre n'occupe qu'une fonction : c'est alors un **arrangement** de 3 membres parmi 12.

$12 \times 11 \times 10 = 1\,320$. **Il y a** $1\,320$ **bureaux possibles.**

d. À chaque membre, dans l'ordre de la liste des 12 membres, on associe une activité parmi 3. Les répétitions sont possibles : c'est donc une **liste avec répétition** (un 12-uplet).

$3^{12} = 531\,441$. **Finalement, il y a** $531\,441$ **répartitions possibles.**

Barème : pour chaque question, 0,5 point pour le modèle correctement identifié et justifié, 0,5 point pour le résultat.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : combinaisons et triangle de Pascal

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « La logique combinatoire » en Terminale.

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP à la Terminale.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- Contrôle de maths Terminale : listes, permutations et arrangements
- Contrôle de maths Terminale : dénombrement et loi binomiale