

Corrigé du contrôle de maths Terminale : combinaisons et triangle de Pascal

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Calculer des combinaisons	4 points
Exercice 2 : Le triangle de Pascal	4 points
Exercice 3 : Démontrer la relation de Pascal	4 points
Exercice 4 : Mains de cinq cartes	4 points
Exercice 5 : Le bon modèle de dénombrement	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Calculer des combinaisons (4 points)

a. D'abord, $C(6, 2) = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$.

Ensuite, $C(7, 3) = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{6 \times 4!} = 7 \times 5 = 35$.

Ainsi, $C(6, 2) = 15$ et $C(7, 3) = 35$.

b. Il y a une seule partie vide et 10 parties à un élément. De plus, il existe une seule partie à 10 éléments (l'ensemble lui-même). **Donc $C(10, 0) = 1$, $C(10, 1) = 10$ et $C(10, 10) = 1$.**

c. Par symétrie, $C(n, k) = C(n, n - k)$. En effet, choisir les 18 éléments retenus revient à choisir

les 2 éléments écartés. Donc $C(20, 18) = C(20, 2) = \frac{20 \times 19}{2} = 190$. $C(20, 18) = 190$.

d. On a $C(n, 2) = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2 \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Or une poignée de main correspond à une paire de personnes. C'est-à-dire une partie à 2 éléments de l'ensemble des 30 personnes : $C(30, 2) = \frac{30 \times 29}{2} = 435$. **Ainsi, 435 poignées de main sont échangées.**

Barème : a) 0,75 point par combinaison (0,5 point pour la simplification, 0,25 point pour le résultat) ; b) 0,5 point pour les trois valeurs ; c) 0,5 point pour la symétrie, 0,5 point pour le résultat ; d) 0,5 point pour la démonstration, 0,5 point pour les 435 poignées de main.

Exercice 2 : Le triangle de Pascal (4 points)

- a. Chaque nombre s'obtient ainsi : on ajoute le nombre situé au-dessus et celui situé au-dessus à gauche.

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

- b. Relation de Pascal : pour $1 \leq k \leq n$, $C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$.

Par exemple, $C(6, 3) = C(5, 2) + C(5, 3) = 10 + 10 = 20$. **C'est donc la relation de Pascal qui permet de compléter chaque ligne à partir de la précédente.**

- c. On lit d'abord $C(7, 3) = 35$.

Puis on fait la somme de la ligne 7 : $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128$. **Ainsi, $C(7, 3) = 35$ et la somme de la ligne 7 vaut 128, c'est-à-dire 2^7 .**

- d. La somme $C(n, 0) + C(n, 1) + \text{etc.} + C(n, n)$ compte les parties d'un ensemble à n

éléments ayant 0 élément, puis 1 élément, et ainsi de suite jusqu'à n éléments. Elle compte donc toutes les parties de cet ensemble, une et une seule fois. Or un ensemble à n éléments possède 2^n parties. En effet, pour chaque élément, on décide s'il appartient ou non à la partie. **Par conséquent, la somme des nombres de la ligne n est égale à 2^n .**

Barème : a) 0,5 point par ligne complétée sans erreur ; b) 0,25 point pour la relation, 0,25 point pour l'exemple ; c) 0,5 point pour la lecture, 0,5 point pour la somme ; d) 0,5 point pour l'interprétation de la somme, 0,5 point pour le nombre de parties.

Exercice 3 : Démontrer la relation de Pascal (4 points)

- Une partie à k éléments qui contient a est déterminée par ses $k - 1$ autres éléments. Ceux-ci sont choisis parmi les n éléments de E différents de a . **Il y en a donc $C(n, k - 1)$.**
- De même, une partie à k éléments qui ne contient pas a est formée de k éléments choisis parmi les n éléments différents de a . **Il y en a donc $C(n, k)$.**
- Une partie de E à k éléments contient a ou ne le contient pas, mais jamais les deux. Ainsi, les deux cas sont disjoints et couvrent toutes les parties. Par le principe additif, le nombre total de parties de E à k éléments est donc la somme des deux nombres trouvés. Or ce nombre total vaut $C(n + 1, k)$. **$C(n + 1, k) = C(n, k - 1) + C(n, k)$.**
- On applique alors la relation avec $n = 9$ et $k = 5$:
 $C(10, 5) = C(9, 4) + C(9, 5) = 126 + 126$. **Finalement, $C(10, 5) = 252$.**

Barème : a) 0,5 point pour le raisonnement, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour le raisonnement, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour la disjonction des cas, 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point pour l'application de la relation, 0,5 point pour le résultat.

Erreur fréquente : en a), répondre $C(n + 1, k - 1)$ en oubliant que a est déjà choisi. En effet, les autres éléments se choisissent parmi n éléments seulement.

Exercice 4 : Mains de cinq cartes (4 points)

- a. Une main est une partie à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes : c'est donc une combinaison.

$$C(32, 5) = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{24\,165\,120}{120} = 201\,376. \text{ Ainsi, Julien peut obtenir } 201\,376 \text{ mains.}$$

- b. On choisit d'abord 2 as parmi les 4. Puis, indépendamment, on choisit 3 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as.

$$C(4, 2) = 6 \text{ et } C(28, 3) = \frac{28 \times 27 \times 26}{6} = 3\,276. \text{ Par le principe multiplicatif : } 6 \times 3\,276 = 19\,656. \text{ Donc } 19\,656 \text{ mains contiennent exactement 2 as.}$$

- c. Ici, les 5 cartes sont choisies parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as.

$$C(28, 5) = \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24}{120} = 98\,280. \text{ Ainsi, } 98\,280 \text{ mains ne contiennent aucun as.}$$

- d. « Au moins un as » est le contraire de « aucun as » : $201\,376 - 98\,280 = 103\,096$.

Puisque les mains sont équiprobables, la probabilité est $\frac{103\,096}{201\,376} \approx 0,51$. **Donc 103 096 mains contiennent au moins un as. La probabilité d'en obtenir une est environ 0,51.**

Barème : a) 0,5 point pour le modèle, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour la décomposition, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour le choix parmi 28, 0,5 point pour le résultat ; d) 0,5 point pour le complémentaire, 0,5 point pour la probabilité.

Exercice 5 : Le bon modèle de dénombrement (4 points)

- a. Les membres du comité n'ont pas de fonction : l'ordre ne compte pas et il n'y a pas de répétition. C'est donc une **combinaison**.

$$C(12, 4) = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{11\,880}{24} = 495. \text{ Il y a 495 comités possibles.}$$

- b. On utilise deux **combinaisons** : 2 filles parmi 7 et 2 garçons parmi 5. Ensuite, on applique le principe multiplicatif.

$$C(7, 2) \times C(5, 2) = 21 \times 10 = 210. \text{ Ainsi, 210 comités comprennent exactement 2 filles et 2 garçons.}$$

- c. Les fonctions sont différentes, donc l'ordre compte. De plus, un membre n'occupe qu'une fonction : c'est alors un **arrangement** de 3 membres parmi 12.

$$12 \times 11 \times 10 = 1\,320. \text{ Il y a 1\,320 bureaux possibles.}$$

- d. À chaque membre, dans l'ordre de la liste des 12 membres, on associe une activité parmi 3. Les répétitions sont possibles : c'est donc une **liste avec répétition** (un 12-uplet).

$$3^{12} = 531\,441. \text{ Finalement, il y a 531\,441 répartitions possibles.}$$

Barème : pour chaque question, 0,5 point pour le modèle correctement identifié et justifié, 0,5 point pour le résultat.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : combinaisons et triangle de Pascal

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours [« La logique combinatoire » en Terminale](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : listes, permutations et arrangements](#)
- [Contrôle de maths Terminale : dénombrement et loi binomiale](#)