Corrigé du contrôle de maths Terminale : aires et valeur moyenne d'une fonction

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Aire sous une parabole	4 points
Exercice 2 : Aire entre deux courbes	5 points
Exercice 3 : Valeurs moyennes	4 points
Exercice 4 : La méthode des rectangles	3 points
Exercice 5 : Le remplissage d'un bassin	4 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Aire sous une parabole (4 points)

a. Pour tout $x \in [0\ ;\ 4]$: $f(x) = x(4 - x)$, avec $x \geq 0$ et $4 - x \geq 0$.

Or un produit de deux nombres positifs est positif, donc $f(x) \geq 0$ sur $[0\ ;\ 4]$.

b. f est continue et positive sur $[0\ ;\ 4]$. Donc l'aire cherchée, en unités d'aire, est $\int_0^4 f(x)\,dx$.

Ensuite, une primitive de f est $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Ainsi, $\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = -\frac{64}{3} + 32 - 0 = \frac{-64+96}{3} = \frac{32}{3}$.

L'aire vaut donc $\frac{32}{3}$ unités d'aire.

c. Une unité d'aire est l'aire d'un rectangle de 2 cm sur 1 cm, soit $2\,\text{cm}^2$.

Alors $\frac{32}{3} \times 2 = \frac{64}{3} \approx 21{,}33$.

L'aire vaut $\frac{64}{3}\,\text{cm}^2$, soit environ $21{,}33\,\text{cm}^2$.

Erreur fréquente : confondre unité de longueur et unité d'aire. On répond alors $\frac{32}{3}\,\text{cm}^2$ ou on multiplie par 3 (somme des deux unités) au lieu de 2 (produit).

Barème : a) 1 point (0,5 pour la factorisation, 0,5 pour le signe) ; b) 2 points (0,5 pour le lien aire et intégrale d'une fonction positive, 0,5 pour la primitive, 1 pour le calcul) ; c) 1 point (0,5 pour l'unité d'aire en cm², 0,5 pour le résultat).

Exercice 2 : Aire entre deux courbes (5 points)

a. D'abord, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = e^x - 1$.

Ensuite, $h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, car la fonction exponentielle est strictement croissante et $e^0 = 1$. De même $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Donc h est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. Elle admet ainsi un minimum en 0, égal à $h(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.

Pour tout réel x, $h(x) \geq h(0) = 0$.

b. $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$. **Donc la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}$** ; elles se touchent au point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

c. Sur $[0\ ;\ 2]$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ et les deux fonctions sont continues, donc :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \left(e^x - (x+1)\right)dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^2.$$

Ainsi, $\mathcal{A} = (e^2 - 2 - 2) - (e^0 - 0 - 0) = e^2 - 4 - 1$.

$\mathcal{A} = e^2 - 5$ **unités d'aire.**

d. Le repère est orthonormé d'unité 2 cm, donc une unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4\ \text{cm}^2$.

Alors $4(e^2 - 5) \approx 4 \times 2{,}38906 \approx 9{,}556$.

$\mathcal{A} \approx 9{,}56\ \text{cm}^2$ **.**

Barème : a) 2 points (0,5 pour la dérivée, 0,5 pour son signe justifié, 0,5 pour les variations, 0,5 pour le signe de h à partir du minimum) ; b) 0,5 point ; c) 1,5 point (0,5 pour l'intégrale de la différence dans le bon ordre, 0,5 pour la primitive, 0,5 pour la valeur exacte) ; d) 1 point (0,5 pour l'unité d'aire, 0,5 pour l'arrondi).

Exercice 3 : Valeurs moyennes (4 points)

La valeur moyenne d'une fonction f continue sur $[a\ ;\ b]$, avec $a < b$, est $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

a. $\mu = \frac{1}{2-0}\int_0^2 (3x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\left[x^3 + x\right]_0^2 = \frac{1}{2}(8 + 2 - 0) = \frac{10}{2}$.

Ainsi, la valeur moyenne de g sur $[0\ ;\ 2]$ est 5.

b. Une primitive de $\sin\left(\frac{\pi\, t}{12}\right)$ est $-\frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\, t}{12}\right)$. En effet, la dérivée de $\cos\left(\frac{\pi\, t}{12}\right)$ est $-\frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi\, t}{12}\right)$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Une primitive de T est donc $t \to 20t - \frac{60}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$.

Ensuite, $\int_0^{12} T(t)\,dt = \left(240 - \frac{60}{\pi}\cos\pi\right) - \left(0 - \frac{60}{\pi}\cos 0\right) = 240 + \frac{60}{\pi} + \frac{60}{\pi} = 240 + \frac{120}{\pi}$.

Enfin, la température moyenne vaut $\frac{1}{12-0}\left(240 + \frac{120}{\pi}\right) = 20 + \frac{10}{\pi} \approx 23{,}18$.

Entre 6 h et 18 h, la température moyenne de la serre est $20 + \frac{10}{\pi} \approx 23{,}18$ °C.

Erreur fréquente : oublier de diviser par la longueur de l'intervalle (12 h). On obtient alors une « température » d'environ 278 °C, visiblement absurde.

Barème : a) 1,5 point (0,5 pour la formule, 0,5 pour la primitive, 0,5 pour le résultat) ; b) 2,5 points (1 pour la primitive avec le coefficient $\frac{12}{\pi}$, 0,5 pour le calcul de l'intégrale, 0,5 pour la division par 12, 0,5 pour la valeur exacte et l'arrondi avec l'unité).

Exercice 4 : La méthode des rectangles (3 points)

a. f est dérivable et $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$. Pour $x \in [0\,;1]$, $-2x \leq 0$ et $e^{-x^2} > 0$, donc $f'(x) \leq 0$: **f est décroissante sur $[0\,;1]$.**

Ainsi, sur chaque intervalle $[kh\,;(k+1)h]$, f est décroissante, donc $f(x) \geq f((k+1)h)$. Le rectangle vert, de hauteur $f((k+1)h)$, est donc situé sous la courbe. **Par croissance de l'intégrale, la somme des aires des rectangles verts est inférieure ou égale à I**. De même, les rectangles rouges, de hauteur $f(kh)$, donnent une somme supérieure ou égale à I.

b. La longueur de chaque intervalle est $h = \frac{1}{n}$. De plus, le rectangle au-dessus de la courbe sur $[kh\,;(k+1)h]$ a pour hauteur $f(kh)$, valeur de f à gauche. Les lignes à compléter sont donc :

```
h = 1/n
S = S + h*f(k*h)
```

Ainsi, la variable s cumule les rectangles sous la courbe (hauteur prise à droite), S ceux au-dessus (hauteur prise à gauche).

c. D'après a) et b) : $s \leq I \leq S$, donc $0{,}74366 \leq I \leq 0{,}74998$ (valeurs approchées).

Or $0{,}74 < 0{,}74366$ et $0{,}74998 < 0{,}75$: $0{,}74 \leq I \leq 0{,}75$ **, encadrement d'amplitude** 10^{-2} **.**

Barème : a) 1 point (0,5 pour la décroissance, 0,5 pour la justification des rectangles) ; b) 1 point (0,5 par ligne) ; c) 1 point (0,5 pour l'encadrement par s *et* S *, 0,5 pour l'amplitude* 10^{-2} *).*

Exercice 5 : Le remplissage d'un bassin (4 points)

a. D'abord, une primitive de $d(t) = 50e^{-0{,}2t}$ est $D(t) = \frac{50}{-0{,}2}e^{-0{,}2t} = -250e^{-0{,}2t}$.

Donc $V = \int_0^{10} d(t)\,dt = D(10) - D(0) = -250e^{-2} + 250 = 250\left(1 - e^{-2}\right) \approx 216{,}17$.

Pendant les 10 premières minutes, la pompe verse $250\left(1 - e^{-2}\right) \approx 216{,}2$ **litres.**

b. Le débit moyen est la valeur moyenne de d sur $[0\ ;\ 10]$:

$$\frac{1}{10-0}\int_0^{10} d(t)\,dt = 25\left(1 - e^{-2}\right) \approx 21{,}62.$$

Ainsi, le débit moyen est d'environ 21,6 litres par minute.

c. Pour $T \geq 0$: $\int_0^T d(t)\,dt = D(T) - D(0) = 250\left(1 - e^{-0{,}2T}\right)$.

Puis $250\left(1 - e^{-0{,}2T}\right) = 200 \Leftrightarrow 1 - e^{-0{,}2T} = 0{,}8 \Leftrightarrow e^{-0{,}2T} = 0{,}2$.

Or la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$: $-0{,}2T = \ln 0{,}2 = -\ln 5$,

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

donc $T = \frac{\ln 5}{0{,}2} = 5\ln 5$.

Enfin, $5\ln 5 \approx 8{,}0472$ min, et $0{,}0472 \times 60 \approx 2{,}8$ s.

La pompe a donc versé 200 litres au bout de $5\ln 5$ minutes, soit environ 8 min 3 s.

Barème : a) 1,5 point (0,5 pour la primitive, 0,5 pour la valeur exacte, 0,5 pour l'arrondi avec l'unité) ; b) 1 point (0,5 pour la formule de la valeur moyenne, 0,5 pour le résultat) ; c) 1,5 point (0,5 pour l'équation $e^{-0{,}2T} = 0{,}2$, 0,5 pour la valeur exacte, 0,5 pour la conversion en minutes et secondes).

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : aires et valeur moyenne d'une fonction

Pour consolider ce que le corrigé t'a appris, relis le cours « Calculs d'intégrales » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** intégrales et primitives.

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP à la Terminale.

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- Contrôle de maths Terminale : intégrales et intégration par parties
- Contrôle de maths Terminale : dérivation et calcul intégral