

Corrigé du contrôle de maths sup : suites récurrentes et points fixes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Points fixes et monotonie	3 points
Exercice 2 : Récurrences linéaires d'ordre 2	5 points
Exercice 3 : Suite arithmético-géométrique	3 points
Exercice 4 : Problème - étude d'une suite récurrente et méthode de Newton	9 points
Total	20 points

Exercice 1 : Points fixes et monotonie (3 points)

- a. Comme $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$, une récurrence immédiate montre que $u_n \in I$ pour tout n . L'intervalle I est fermé : ses bornes finies sont atteintes, et le passage à la limite dans les inégalités larges qui les encadrent donne $\ell \in I$.

D'une part, (u_{n+1}) est extraite de (u_n) , donc elle converge vers ℓ . D'autre part, f est continue en $\ell \in I$, donc $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$. Par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$: **la limite est un point fixe de f** .

- b. *Cas croissant.* Supposons $u_0 \leq u_1$. Montrons par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$. C'est vrai au rang 0. Si $u_n \leq u_{n+1}$, alors, comme f est croissante, $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. La suite est donc croissante. Le cas $u_0 \geq u_1$ donne de même une suite

décroissante. **Dans les deux cas, (u_n) est monotone.**

Cas décroissant. La composée $g = f \circ f$ de deux fonctions décroissantes est croissante, et I est stable par g . Or $u_{2n+2} = g(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = g(u_{2n+1})$. D'après le cas précédent appliqué à g , **les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la stabilité et le passage à la limite, 0,5 point pour la continuité, 0,5 point pour l'unicité de la limite ; b) 1,5 point : 1 point pour la récurrence du cas croissant, 0,5 point pour le passage par $f \circ f$.

Erreur fréquente : oublier la continuité de f en ℓ , sans laquelle la limite n'est pas forcément un point fixe.

Exercice 2 : Récurrences linéaires d'ordre 2 (5 points)

- a. L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0$, soit $(r - 2)(r - 3) = 0$. Elle a deux racines réelles distinctes, donc il existe λ, μ réels tels que $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$.

Les conditions initiales donnent $\lambda + \mu = 1$ et $2\lambda + 3\mu = 4$. Ainsi $\mu = 4 - 2 = 2$ et $\lambda = -1$.

Donc $u_n = 2 \times 3^n - 2^n$. Vérification : $u_2 = 5 \times 4 - 6 = 14$ et $2 \times 9 - 4 = 14$.

- b. L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$ a une racine double $r = 2$. Donc $v_n = (\lambda + \mu n) 2^n$.

Ensuite $v_0 = \lambda = 0$, puis $v_1 = 2\mu = 1$, donc $\mu = \frac{1}{2}$.

Donc $v_n = n 2^{n-1}$. Vérification : $v_2 = 4$ et $v_3 = 4 \times 4 - 4 \times 1 = 12 = 3 \times 2^2$.

- c. L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 4 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$.

Ses racines sont $1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i\pi/3}$. Les solutions réelles s'écrivent :

$$w_n = 2^n \left(A \cos \frac{n\pi}{3} + B \sin \frac{n\pi}{3} \right).$$

D'abord $w_0 = A = 1$. Ensuite $w_1 = 2\left(\frac{1}{2} + B\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + B\sqrt{3} = 1$, donc $B = 0$.

Donc $w_n = 2^n \cos \frac{n\pi}{3}$. Vérification : $w_2 = 2 - 4 = -2$ et $4 \cos \frac{2\pi}{3} = -2$.

Enfin, $w_{6k} = 2^{6k} = 64^k$ tend vers $+\infty$. **La suite (w_n) n'est pas bornée.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour l'équation caractéristique, 0,5 point pour la forme générale, 0,5 point pour les constantes ; b) 1,5 point, même répartition ; c) 2 points : 0,5 point pour les racines complexes, 0,5 point pour la forme réelle, 0,5 point pour les constantes, 0,5 point pour la suite extraite non bornée.

Exercice 3 : Suite arithmético-géométrique (3 points)

a. Le point fixe vérifie $\ell = \frac{2}{3}\ell + 1$, soit $\frac{\ell}{3} = 1$: $\ell = 3$. Posons $b_n = a_n - 3$. Alors :

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}(a_n - 3) = \frac{2}{3}b_n.$$

La suite (b_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $b_0 = -3$. **Donc**

$$a_n = 3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n. \text{ Vérification : } a_1 = 3 - 2 = 1.$$

b. Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, on a $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$. **Donc** (a_n) **converge vers** 3.

Ensuite, $|a_n - 3| = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$. La condition $|a_n - 3| \leq 10^{-3}$ équivaut à $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 3000$. Par croissance de $\ln$, elle équivaut à $n \ln \frac{3}{2} \geq \ln 3000$, soit :

$$n \geq \frac{\ln 3000}{\ln(3/2)} \approx \frac{8,006}{0,405} \approx 19,8.$$

Le plus petit entier convenable est $n = 20$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour le point fixe, 0,5 point pour la suite géométrique auxiliaire, 0,5 point pour la formule ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la limite, 0,5 point pour la mise en équation, 0,5 point pour le rang.

Exercice 4 : Problème - étude d'une suite récurrente et méthode de Newton (9 points)

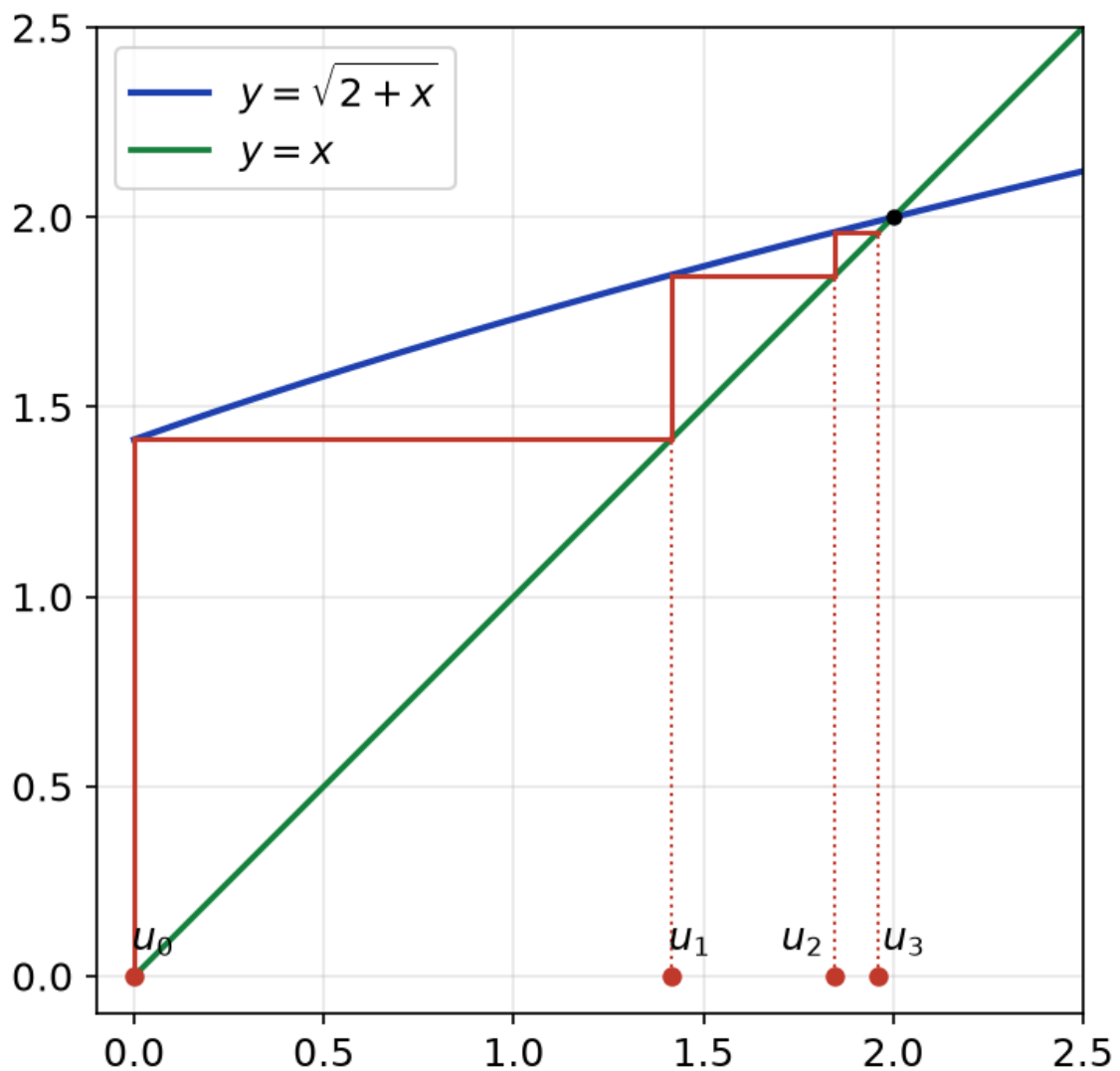
Partie A : la suite de terme initial 0

1. La fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ comme composée de fonctions croissantes. Pour $x \in [0, 2]$, on a donc $\sqrt{2} = f(0) \leq f(x) \leq f(2) = 2$. **Ainsi**
 $f([0, 2]) \subset [\sqrt{2}, 2] \subset [0, 2]$: **l'intervalle est stable.**
2. Pour $x \in [0, 2]$, multiplions par la quantité conjuguée, qui est strictement positive :

$$f(x) - x = \frac{2 + x - x^2}{\sqrt{2} + x + x} = \frac{(2 - x)(1 + x)}{\sqrt{2} + x + x}.$$

Le numérateur et le dénominateur sont positifs, donc $f(x) \geq x$ sur $[0, 2]$. Or $u_0 \in [0, 2]$, donc $u_n \in [0, 2]$ pour tout n par stabilité. Par conséquent $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$. **La suite (u_n) est croissante.**

3. La suite est croissante et majorée par 2. Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell \in [0, 2]$. La fonction f est continue sur le fermé $[0, 2]$, donc, d'après l'exercice 1, $f(\ell) = \ell$. Ainsi $\sqrt{2 + \ell} = \ell$, d'où $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, soit $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, **la suite converge vers 2.**
4. On part de $u_0 = 0$ sur l'axe des abscisses. On monte verticalement jusqu'à la courbe, au point d'ordonnée $u_1 = \sqrt{2}$, puis on rejoint horizontalement la droite $y = x$. On redescend alors sur l'axe au point d'abscisse u_1 , et ainsi de suite. **On obtient un escalier qui monte vers le point $(2, 2)$.**



Valeurs approchées : $u_1 \approx 1,414$, $u_2 \approx 1,848$, $u_3 \approx 1,962$.

5. Pour tout n , la quantité conjuguée donne :

$$|u_{n+1} - 2| = |\sqrt{2 + u_n} - 2| = \frac{|u_n - 2|}{\sqrt{2 + u_n} + 2} \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|,$$

car $\sqrt{2 + u_n} + 2 \geq 2$. Par récurrence, $|u_n - 2| \leq \frac{|u_0 - 2|}{2^n} = \frac{2}{2^n} = 2^{1-n}$.

Il suffit donc que $2^{n-1} \geq 10^6$. Or $2^{20} = 1\,048\,576 \geq 10^6$. **Pour tout $n \geq 21$, u_n approche 2 à 10^{-6} près.**

Partie B : méthode de Newton

6. On a $g'(x) = 2x$, donc $N(x) = x - \frac{x^2 - 3}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + 3}{2x}$. **Ainsi $N(x) = \frac{x^2 + 3}{2x}$.**

7. Pour $x > 0$:

$$N(x) - \sqrt{3} = \frac{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}{2x} = \frac{(x - \sqrt{3})^2}{2x}.$$

Montrons par récurrence que $x_n \geq \sqrt{3}$. C'est vrai pour $x_0 = 2$. Si $x_n \geq \sqrt{3} > 0$, la formule donne $x_{n+1} - \sqrt{3} \geq 0$. **Donc $x_n \geq \sqrt{3}$ pour tout n** , et la suite est bien définie.

8. Comme $x_n \geq \sqrt{3}$, on a $2x_n \geq 2\sqrt{3} \geq 3$, car $12 \geq 9$. Donc $e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2x_n} \leq \frac{e_n^2}{3}$, ce qui s'écrit $\frac{e_{n+1}}{3} \leq \left(\frac{e_n}{3}\right)^2$.

Par récurrence, $\frac{e_n}{3} \leq \left(\frac{e_0}{3}\right)^{2^n}$. Or $\sqrt{3} \geq 1,7$, donc $e_0 = 2 - \sqrt{3} \leq 0,3$ et $\frac{e_0}{3} \leq 0,1$.

Ainsi $0 \leq e_n \leq 3 \times 10^{-2^n}$.

Pour $n = 3$, $e_3 \leq 3 \times 10^{-8} < 10^{-7}$. Donc x_3 approche $\sqrt{3}$ à 10^{-7} près. En effet, $x_1 = 1,75$, $x_2 \approx 1,732\,143$ et $x_3 \approx 1,732\,051$.

Commentaire : dans la partie A, l'erreur est divisée par 2 à chaque étape (convergence géométrique, il faut 21 termes). Avec Newton, le nombre de décimales exactes double à chaque étape : c'est une **convergence quadratique**.

Barème : 1) 1 point ; 2) 1 point : 0,5 point pour la factorisation, 0,5 point pour la monotonie ; 3) 1,5 point : 0,5 point pour la limite monotone, 0,5 point pour le point fixe, 0,5 point pour le choix de la racine ; 4) 1 point pour l'escalier correct ; 5) 1,5 point : 0,5 point par étape ; 6) 0,5 point ; 7) 1 point : 0,5 point pour l'identité, 0,5 point pour la récurrence ; 8) 1,5 point : 0,5 point pour l'inégalité, 0,5 point pour la récurrence, 0,5 point pour la conclusion et le commentaire.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : suites récurrentes et points fixes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Suites récurrentes](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [suites récurrentes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).