

Corrigé du contrôle de maths sup : sous-espaces vectoriels et familles libres

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours	3 points
Exercice 2 : Reconnaître des sous-espaces vectoriels	3,5 points
Exercice 3 : Familles de fonctions	4 points
Exercice 4 : Polynômes à degrés échelonnés	3 points
Exercice 5 : Problème : sommes directes et supplémentaires	6,5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

- a. $0 \in F$ et $0 \in G$, donc $0 \in F \cap G$. Si $u, v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u + \lambda v$ appartient à F et à G , qui sont des sous-espaces. **Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .**
- b. Définition : la somme $F + G$ est directe si tout vecteur de $F + G$ s'écrit de façon unique $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Supposons la somme directe et soit $u \in F \cap G$. Alors $0 = u + (-u)$, avec $u \in F$ et $-u \in G$, et aussi $0 = 0 + 0$. Par unicité, $u = 0$. Réciproquement, supposons $F \cap G = \{0\}$ et $f + g = f' + g'$ avec $f, f' \in F$ et $g, g' \in G$. Alors $f - f' = g' - g$ appartient à $F \cap G$, donc il est nul : $f = f'$ et $g = g'$. **La somme est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.**

- c. Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ est un sous-espace ; de même si $G \subset F$. Réciproquement, supposons $F \cup G$ sous-espace, et raisonnons par l'absurde en supposant $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Prenons $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Alors $x + y \in F \cup G$. Si $x + y \in F$, alors $y = (x + y) - x \in F$: c'est absurde. Si $x + y \in G$, alors $x = (x + y) - y \in G$: c'est encore absurde. **Donc $F \subset G$ ou $G \subset F$.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 0,5 pour la définition, 0,5 par sens ; c) 1 point : 0,5 pour la réciproque immédiate, 0,5 pour le raisonnement par l'absurde.

Exercice 2 : Reconnaître des sous-espaces vectoriels (3,5 points)

- a. F_1 est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, donc un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ (il contient 0 et il est stable par combinaison linéaire). La seconde équation donne $x = y$, puis la première $z = x + 2y = 3y$. Ainsi $F_1 = \{(y, y, 3y) : y \in \mathbb{R}\}$. **Donc $F_1 = \text{Vect}((1, 1, 3))$ est un sous-espace vectoriel.**
- b. Le polynôme nul est dans F_2 . Si $P, Q \in F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(P + \lambda Q)(1) = 0$ et $(P + \lambda Q)'(0) = P'(0) + \lambda Q'(0) = 0$, par linéarité de l'évaluation et de la dérivation. **F_2 est un sous-espace vectoriel** (il contient par exemple $X^2 - 1$).
- c. La fonction nulle vérifie $0 \neq 1$, donc elle n'appartient pas à F_3 . **F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel.**
- d. $(1, 0)$ et $(0, 1)$ appartiennent à F_4 , mais leur somme $(1, 1)$ vérifie $1 \times 1 \neq 0$. **F_4 n'est pas stable par somme : ce n'est pas un sous-espace.**
- e. La fonction nulle est bornée. Si $|f| \leq M$ et $|g| \leq M'$, alors $|f + \lambda g| \leq M + |\lambda| M'$ par l'inégalité triangulaire. **F_5 est un sous-espace vectoriel.**
- f. La suite nulle vérifie la relation. Si u et v la vérifient, alors pour tout n , $u_{n+2} + \lambda v_{n+2} = (u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + (u_n + \lambda v_n)$. **F_6 est un sous-espace vectoriel.**

Barème : a) 1 point : 0,5 pour la structure, 0,5 pour le vecteur générateur ; b) à f) 0,5 point chacune, seulement si la justification est correcte.

Exercice 3 : Familles de fonctions (4 points)

- a. Une famille quelconque est libre si toutes ses sous-familles finies le sont. Montrons par récurrence sur $p \geq 1$: pour tous réels $a_1 < a_2 < \dots < a_p$, la famille $(e_{a_1}, \dots, e_{a_p})$ est libre. Pour $p = 1$, e_{a_1} ne s'annule pas, donc elle est non nulle. Supposons le résultat vrai au rang $p - 1$ et soit $\sum_{k=1}^p \lambda_k e^{a_k x} = 0$ pour tout réel x . En divisant par $e^{a_p x}$, on obtient $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e^{(a_k - a_p)x} + \lambda_p = 0$. Comme $a_k - a_p < 0$ pour $k < p$, chaque exponentielle tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$, donc $\lambda_p = 0$. L'hypothèse de récurrence donne ensuite $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$. **La famille $(e_a)_a \in \mathbb{R}$ est libre.**
- b. Soient $a_1, \dots, a_p$ distincts et $\sum_{k=1}^p \lambda_k f_{a_k} = 0$. Fixons j . La fonction $g = \sum_{k \neq j} \lambda_k f_{a_k}$ est dérivable en a_j , car chaque f_{a_k} avec $k \neq j$ est dérivable hors de a_k . Alors $\lambda_j f_{a_j} = -g$ est dérivable en a_j . Or f_{a_j} n'est pas dérivable en a_j : ses dérivées à gauche et à droite valent -1 et 1 . Donc $\lambda_j = 0$, et ce pour tout j . **La famille $(f_a)_a \in \mathbb{R}$ est libre.**
- c. Pour tout réel x , $\sin(x+1) = \cos 1 \sin x + \sin 1 \cos x$. **La famille est liée** : son troisième vecteur est combinaison linéaire des deux premiers.
- d. Si $\lambda \cos^2 + \mu \sin^2 = 0$, l'évaluation en 0 donne $\lambda = 0$ et l'évaluation en $\frac{\pi}{2}$ donne $\mu = 0$. **Donc $(\cos^2, \sin^2)$ est libre.** De plus, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Ces deux fonctions appartiennent donc à $\text{Vect}(\cos^2, \sin^2)$. L'inclusion réciproque est évidente. **Les deux sous-espaces engendrés sont égaux.**

Erreur fréquente : en a), faire tendre x vers $+\infty$ sans avoir rangé les a_k : c'est le plus grand exposant qui domine.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la réduction aux sous-familles finies, 1 pour la récurrence ; b) 1 point : 0,5 pour la dérivabilité de $\mathcal{G}$, 0,5 pour la conclusion ; c) 0,5 point ; d) 1 point : 0,5 pour la liberté, 0,5 pour l'égalité des sous-espaces.

Exercice 4 : Polynômes à degrés échelonnés (3 points)

a. Supposons $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$ avec des λ_k non tous nuls. Soit m le plus grand indice tel que $\lambda_m \neq 0$. Alors $\sum_{k=0}^m \lambda_k P_k$ a pour terme de degré m celui de $\lambda_m P_m$, non nul, car les P_k avec $k < m$ sont de degré strictement inférieur à m . Cette combinaison est donc de degré m , et elle ne peut pas être le polynôme nul : c'est une contradiction. **La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.**

b. Les polynômes de $\mathcal{B}$ sont de degrés respectifs 0, 1, 2 et 3. D'après a), **$\mathcal{B}$ est libre.** De plus :

$$1 = 1, \quad X = (X - 1) + 1, \quad X^2 = (X - 1)^2 + 2(X - 1) + 1,$$

$$X^3 = (X^3 + X) - (X - 1) - 1.$$

Ainsi $1, X, X^2, X^3$ appartiennent à $\text{Vect}(\mathcal{B})$, donc $\mathbb{R}_3[X] \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$. L'inclusion inverse est claire, car les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont de degré au plus 3. **Donc $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}_3[X]$.**

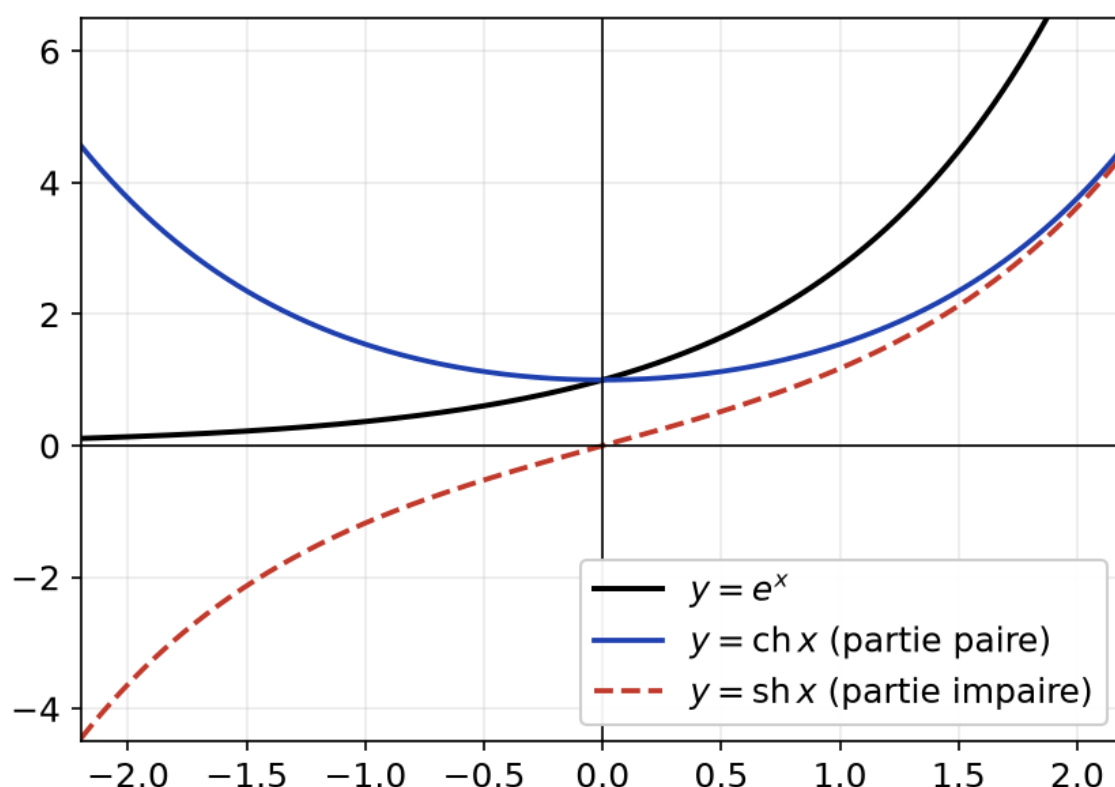
c. Avec b), $X^2 + X = (X - 1)^2 + 2(X - 1) + 1 + (X - 1) + 1$. **Donc**
 $X^2 + X = (X - 1)^2 + 3(X - 1) + 2$. Contrôle :
 $X^2 - 2X + 1 + 3X - 3 + 2 = X^2 + X$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour l'indice maximal, 1 pour l'argument de degré ; b) 1 point : 0,5 pour la liberté, 0,5 pour les quatre écritures ; c) 0,5 point.

Exercice 5 : Problème : sommes directes et supplémentaires (6,5 points)

Partie A

- a. La fonction nulle est paire et impaire. Si f, g sont paires et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(f + \lambda g)(-x) = f(x) + \lambda g(x) : \mathcal{P}$ est un sous-espace ; il en va de même pour $\mathcal{I}$. Si $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, alors $f(x) = f(-x) = -f(x)$, donc $f = 0$: la somme est directe (exercice 1). Pour l'existence, on raisonne par analyse-synthèse. Si $f = p + i$, alors $f(-x) = p(x) - i(x)$, ce qui impose $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Réciproquement, ces deux fonctions sont respectivement paire et impaire, et leur somme vaut f .
Donc $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
- b. Avec les formules précédentes, la partie paire de l'exponentielle est $x \rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et sa partie impaire $x \rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. **Donc** $\exp = \text{ch} + \text{sh}$, avec $\text{ch} \in \mathcal{P}$ et $\text{sh} \in \mathcal{I}$.



- c. Pour toute $f \in E$, on écrit $f = f(0) \cdot 1 + (f - f(0))$. La fonction constante $f(0) \cdot 1$ est

paire, et $f - f(0)$ s'annule en 0. **Donc** $\mathcal{P} + \mathcal{Z} = \mathcal{E}$. En revanche, $x \rightarrow x^2$ est paire et s'annule en 0, donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{Z} \neq \{0\}$. **La somme n'est pas directe.**

Partie B

- d. $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces, car la transposition est linéaire : si $A^T = A$ et $B^T = B$, alors $(A + \lambda B)^T = A + \lambda B$, et de même pour les matrices antisymétriques. Si $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$, alors $M = M^T = -M$, donc $M = 0$. Pour l'existence, toute matrice s'écrit $M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$, où le premier terme est symétrique et le second antisymétrique. **Donc** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

- e. Avec $M^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La première matrice est symétrique, la seconde antisymétrique, et leur somme redonne bien M .

Partie C

- f. F est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène, donc un sous-espace, et G est un sous-espace engendré. Si $(t, t, t) \in F$, alors $3t = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$. Soit $u = (x, y, z)$ et $m = \frac{x+y+z}{3}$. Le vecteur $u - m(1, 1, 1)$ a pour somme des coordonnées $x + y + z - 3m = 0$, donc il appartient à F . **Ainsi** $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, avec

$$(x, y, z) = (x - m, y - m, z - m) + m(1, 1, 1), \quad m = \frac{x + y + z}{3}.$$

- g. Si $(a, 0, 0) \in F$, alors $a = 0$, donc $F \cap H = \{0\}$. De plus, $(x, y, z) = (-y - z, y, z) + (x + y + z)(1, 0, 0)$, avec $(-y - z, y, z) \in F$. **Donc** $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$: **un sous-espace admet en général plusieurs supplémentaires, et il ne faut jamais dire « le » supplémentaire.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour les sous-espaces, 0,5 pour l'intersection, 0,5 pour l'analyse-synthèse ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point ; d) 1,5 point : 0,5 pour les sous-espaces, 0,5 pour l'intersection, 0,5 pour la décomposition ; e) 0,5 point ; f) 1,5 point : 0,5 pour l'intersection, 1 pour la décomposition explicite ; g) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : sous-espaces vectoriels et familles libres

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Espaces vectoriels](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces vectoriels](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).