Corrigé du contrôle de maths sup : sommes, binôme et formules de trigonométrie

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours	3 points
Exercice 2 : Sommes et coefficients binomiaux	5 points
Exercice 3 : Inégalités, valeur absolue et partie entière	4 points
Exercice 4 : Équations trigonométriques	4 points
Exercice 5 : Somme des cosinus par télescopage	4 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

a. Pour $0 \leq k \leq n-1$, on réduit au même dénominateur $(k+1)!\,(n-k)!$:

$$\binom{n}{k} + [\text{eft?}](\tbinom{n}{k+1} \rightarrow)) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{n!\big[(k+1)+(n-k)\big]}{(k+1)!\,(n-k)!}.$$

Or $(k+1)+(n-k) = n+1$, donc la somme vaut $\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$. **C'est exactement** $[\text{let?}](\tbinom{n+1}{k+1} [\text{righht?}])$.

b. En additionnant $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$, on obtient $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

D'où la première formule.

Ensuite, par soustraction de $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b$ à $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$, on a $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a\sin b$. Posons alors $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, de sorte que $a + b = p$ et $a - b = q$. **On obtient** $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour le dénominateur commun, 0,5 pour la mise en facteur, 0,5 pour la conclusion ; b) 1,5 point : 0,5 pour la formule de produit, 1 pour la formule de $\sin p - \sin q$ *avec le changement de variables.*

Exercice 2 : Sommes et coefficients binomiaux (5 points)

a. Pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$. La somme est donc télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, la somme vaut $\frac{n}{n+1}$.

b. On a bien $(k+1)! - k! = k!\,(k+1-1) = k \cdot k!$. Par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)! - k!\right] = (n+1)! - 1!\,.$$

La somme vaut $(n+1)! - 1$.

c. L'ensemble des indices est $\{(i,j), 1 \leq i \leq j \leq n\}$. On peut le décrire en fixant d'abord $j \in [\![1,n]\!]$, puis $i \in [\![1,j]\!]$. Ainsi

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \cdot \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (j+1).$$

Or $\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$. **Donc** $S_n = \frac{n(n+3)}{4}$**.** Vérification : $S_1 = 1$ et $\frac{1\times 4}{4} = 1$.

d. Par la formule du binôme appliquée à $(1+2)^n$, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n$.

Pour $1 \le k \le n$,

$$k\binom{n}{k} = \frac{k\cdot n!}{k!\,(n-k)!} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n[\backslash\mathrm{let?}]\binom{n-1}{k-1}[\backslash\mathrm{righht?}]).$$

Le terme d'indice 0 étant nul, on obtient avec le changement d'indice $j = k-1$:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{j=0}^{n-1}[\backslash\mathrm{eft?}]\binom{n-1}{j}\to)) = n\,(1+1)^{n-1}.$$

Donc $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$**.**

Barème : a) 1 point : 0,5 pour la décomposition, 0,5 pour le télescopage ; b) 1 point : 0,5 pour la vérification de l'égalité, 0,5 pour le résultat ; c) 1,5 point : 0,5 pour la description des indices, 0,5 pour le calcul de la somme intérieure, 0,5 pour le résultat ; d) 1,5 point : 0,5 pour 3^n, 0,5 pour la formule du capitaine, 0,5 pour $n\,2^{n-1}$.

Exercice 3 : Inégalités, valeur absolue et partie entière (4 points)

a. Les deux membres sont positifs, et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. L'inéquation équivaut donc à $(2x-1)^2 \le (x+2)^2$, soit

$$4x^2 - 4x + 1 \le x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 3 \le 0 \Leftrightarrow (3x+1)(x-3) \le 0.$$

Un trinôme est négatif entre ses racines $-\frac{1}{3}$ et 3. **L'ensemble des solutions est** $\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$**.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Posons $m = \lfloor x \rfloor$ et $r = x - m \in [0,1[$. Alors $2x = 2m + 2r$ avec $2m \in \mathbb{Z}$, donc $\lfloor 2x \rfloor = 2m + \lfloor 2r \rfloor$. Comme $2r \in [0,2[$, on a $\lfloor 2r \rfloor \in \{0,1\}$. **Ainsi** $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2r \rfloor \in \{0,1\}$ **.**

c. Pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$. Or $0 < k(k-1) \leq k^2$, donc $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.

En sommant ces inégalités pour k de 2 à n, puis par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n}.$$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ (pour $n = 1$, la somme de 2 à 1 est vide et l'on a l'égalité $1 = 1$).

Erreur fréquente : élever au carré sans avoir vérifié que les deux membres sont positifs. Ici c'est le cas grâce aux valeurs absolues.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la justification du passage au carré, 0,5 pour la factorisation, 0,5 pour l'ensemble des solutions ; b) 1 point : 0,5 pour l'écriture $x = m + r$, 0,5 pour la conclusion ; c) 1,5 point : 0,5 pour la majoration de $\frac{1}{k^2}$, 1 pour la sommation et le télescopage.

Exercice 4 : Équations trigonométriques (4 points)

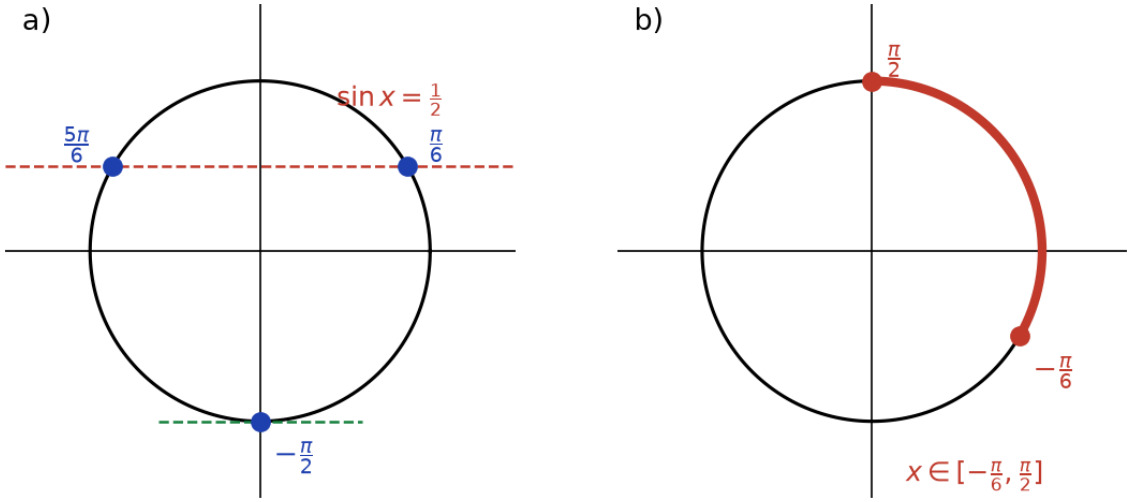
a. Par la formule de duplication, $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$. En posant $s = \sin x$, l'équation devient $2s^2 + s - 1 = 0$, c'est-à-dire $(2s-1)(s+1) = 0$. Donc $\sin x = \frac{1}{2}$ ou $\sin x = -1$.

D'une part, $\sin x = \frac{1}{2}$ équivaut à $x \equiv \frac{\pi}{6}$ ou $x \equiv \frac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$. D'autre part, $\sin x = -1$ équivaut à $x \equiv -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

Les solutions sont les réels $\frac{\pi}{6}+2k\pi$ **,** $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ **et** $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ **, avec** $k\in\mathbb{Z}$, soit exactement les réels $\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$.

b. On a $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$. **Donc** $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ **.**

L'inéquation équivaut à $\sin X\geq\frac{1}{2}$ avec $X=x+\frac{\pi}{3}$. Quand x décrit $]-\pi,\pi]$, X décrit $\left]-\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$, intervalle de longueur 2π . Sur cet intervalle, le cercle donne $\sin X\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow X\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$. **L'ensemble des solutions est** $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ **.**



c. Comme $\frac{t}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\frac{t}{2}\neq 0$ et $1+u^2=\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}$. Par les formules de duplication,

$$\cos t=\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}=\cos^2\frac{t}{2}\,(1-u^2),\quad \sin t=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=2u\cos^2\frac{t}{2}.$$

En remplaçant $\cos^2\frac{t}{2}$ par $\frac{1}{1+u^2}$, **on obtient** $\cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ **et** $\sin t=\frac{2u}{1+u^2}$ **.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour l'équation en $\sin x$ *, 0,5 pour la factorisation, 0,5 pour les trois familles de solutions ; b) 1,5 point : 0,5 pour la forme* $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ *, 0,5 pour le changement de variable et l'intervalle, 0,5 pour l'ensemble des solutions ; c) 1 point : 0,5 par formule.*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 5 : Somme des cosinus par télescopage (4 points)

a. Appliquons la formule $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ de l'exercice 1 avec $p = \left(k+\frac{1}{2}\right)x$ et $q = \left(k-\frac{1}{2}\right)x$. On a $\frac{p+q}{2} = kx$ et $\frac{p-q}{2} = \frac{x}{2}$. **D'où** $\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos(kx)$.

b. En sommant pour k de 0 à n, la somme de droite est télescopique :

$$2\sin\tfrac{x}{2}\,C_n = \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(-\tfrac{x}{2}\right) = \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right) + \sin\tfrac{x}{2}.$$

On transforme cette somme par la formule $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ (obtenue comme en 1b). Ici $\frac{p+q}{2} = \frac{(n+1)x}{2}$ et $\frac{p-q}{2} = \frac{nx}{2}$. Comme $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, on divise :

$$C_n = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

C'est la formule demandée ; la première forme donne aussi $C_n = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.

c. Pour $n \geq 1$, le réel $x = \frac{2\pi}{n+1}$ appartient à $]0,\pi]$, donc pas à $2\pi\mathbb{Z}$. Alors $\frac{(n+1)x}{2} = \pi$ et $\sin\pi = 0$. **Donc** $\sum_{k=0}^{n} \cos\frac{2k\pi}{n+1} = 0$.

d. Par linéarisation, $\cos^2(kx) = \frac{1+\cos(2kx)}{2}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(k\cdot 2x).$$

Comme $x \notin \pi\mathbb{Z}$, le réel $2x$ n'est pas dans $2\pi\mathbb{Z}$: on peut appliquer la question b au réel $2x$, ce qui donne $\frac{\sin((n+1)x)\cos(nx)}{\sin x}$. **Ainsi** $\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx) = \frac{n+1}{2} + \frac{\sin((n+1)x)\cos(nx)}{2\sin x}$.

Barème : a) 1 point : 0,5 pour le choix de p et q, 0,5 pour la conclusion ; b) 1,5 point : 0,5 pour le télescopage, 0,5 pour la transformation somme-produit, 0,5 pour la formule finale ; c) 0,5 point ; d) 1 point : 0,5 pour la linéarisation, 0,5 pour l'application à $2x$ avec l'hypothèse vérifiée.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : sommes, binôme et formules de trigonométrie

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Sommes, produits et inégalités » en maths sup et « Trigonométrie » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** sommes, produits et inégalités, trigonométrie.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.