

Corrigé du contrôle de maths sup : séries numériques et familles sommables

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours sur le lien suite-série	3 points
Exercice 2 : Nature de cinq séries	4 points
Exercice 3 : Comparaison série-intégrale	4 points
Exercice 4 : Une série alternée et un piège des équivalents	3,5 points
Exercice 5 : Familles sommables et produit de Cauchy	5,5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours sur le lien suite-série (3 points)

- a. Notons $S_N = \sum_{n=0}^{N-1} (u_{n+1} - u_n)$ la somme partielle d'ordre $N - 1$. Les termes se simplifient deux à deux (télescopage) : $S_N = u_N - u_0$. La série converge si et seulement si (S_N) converge, c'est-à-dire si et seulement si (u_N) converge. **Dans ce cas,**
- $$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim u_n - u_0.$$

- b. Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$: c'est $-(w_{n+1} - w_n)$ avec $w_n = \frac{1}{n}$, qui tend

vers 0. Donc $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

De même, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$, et la suite $(\ln n)$ diverge vers $+\infty$. D'après a),
la série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge (ses sommes partielles valent $\ln(N+1)$).

c. En réduisant au même dénominateur :

$$\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$$

La suite $t_n = \frac{1}{n(n+1)}$ tend vers 0, donc par télescopage :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}(t_1 - t_{N+1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)}\right).$$

La somme vaut $\frac{1}{4}$.

Barème : a) 1 point (0,5 pour le télescopage, 0,5 pour l'équivalence et la somme) ; b) 1 point (0,5 par série) ; c) 1 point (0,5 pour la vérification, 0,5 pour la somme).

Exercice 2 : Nature de cinq séries (4 points)

a. $u_n \geq 0$ et $u_n \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (exposant $2 > 1$).
 Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ **converge**.

b. Posons $y = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$. Comme $\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$, on a $u_n = \frac{y^3}{6} + o(y^3)$, soit
 $u_n \sim \frac{1}{6n^{3/2}}$. Ce terme est positif et $\frac{3}{2} > 1$: $\sum u_n$ **converge** par comparaison à une
 série de Riemann.

c. Comme $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$. La série $\sum (-u_n)$ est à termes
 positifs à partir d'un certain rang, avec $-u_n \sim \frac{1}{2n^2}$. Elle converge par comparaison, donc
 $\sum u_n$ **converge**. (Du reste, $\ln(1+x) \leq x$ montre que $u_n \leq 0$ pour tout n .)

d. Pour $n \geq 2$, $u_n = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$. Or

$$n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n^2 \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -n - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc $u_n = e^{-1/2} e^{-n} e^{O(1/n)} \sim e^{-1/2} e^{-n}$. La série géométrique $\sum e^{-n}$ converge (raison $e^{-1} < 1$). $\sum u_n$ **converge**.

e. $u_n = \frac{1}{n} \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ et $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc $u_n \sim \frac{1}{n}$. Ces termes sont positifs et la série harmonique diverge : $\sum u_n$ **diverge**.

Erreur fréquente : en d), écrire $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \sim e^{-n}$ en oubliant le facteur $e^{-1/2}$; ici la conclusion ne change pas, mais l'équivalent est faux.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point (0,5 pour le développement, 0,5 pour la conclusion) ; c) 1 point (0,5 pour l'équivalent, 0,5 pour le signe constant et la conclusion) ; d) 1 point (0,5 pour le développement, 0,5 pour la comparaison géométrique) ; e) 0,5 point.

Exercice 3 : Comparaison série-intégrale (4 points)

a. Sur $[2, +\infty[$, $x > 0$ et $\ln x > 0$, donc $f(x) > 0$. La fonction $x \rightarrow x \ln x$ a pour dérivée $\ln x + 1 > 0$: elle est strictement croissante et positive, donc f **est décroissante**. Comme $(\ln(\ln x))' = \frac{1/x}{\ln x}$, **une primitive de f est $x \rightarrow \ln(\ln x)$** .

b. Soit $k \geq 3$. Pour $x \in [k, k+1]$, la décroissance donne $f(x) \leq f(k)$; pour $x \in [k-1, k] \subset [2, +\infty[$, elle donne $f(x) \geq f(k)$. Par croissance de l'intégrale sur des segments de longueur 1 : $\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f$. Sur la figure, les rectangles du graphique du haut recouvrent la courbe, ceux du graphique du bas sont sous la courbe.

c. En sommant pour k de 3 à N , puis en ajoutant $f(2) = \frac{1}{2 \ln 2}$ (relation de Chasles) :

$$f(2) + \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 3) \leq S_N \leq f(2) + \ln(\ln N) - \ln(\ln 2).$$

Le minorant tend vers $+\infty$, donc $S_N \rightarrow +\infty$: **la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.**

Pour l'équivalent, $\ln(N+1) = \ln N + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \sim \ln N$, donc

$\ln(\ln(N+1)) = \ln(\ln N) + o(1)$. En divisant l'encadrement par $\ln(\ln N) \rightarrow +\infty$, les deux bornes tendent vers 1. Par le théorème des gendarmes, $S_N \sim \ln(\ln N)$.

d. Soit $g(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ sur $[2, +\infty[$. Elle est positive et décroissante (inverse d'un produit de fonctions positives croissantes), et $x \rightarrow -\frac{1}{\ln x}$ en est une primitive. Comme en b),

$$g(k) \leq \int_{k-1}^k g \text{ pour } k \geq 3, \text{ donc}$$

$$\sum_{k=2}^N g(k) \leq g(2) + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln N} \leq g(2) + \frac{1}{\ln 2}.$$

Les sommes partielles d'une série à termes positifs sont majorées : $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ **converge.**

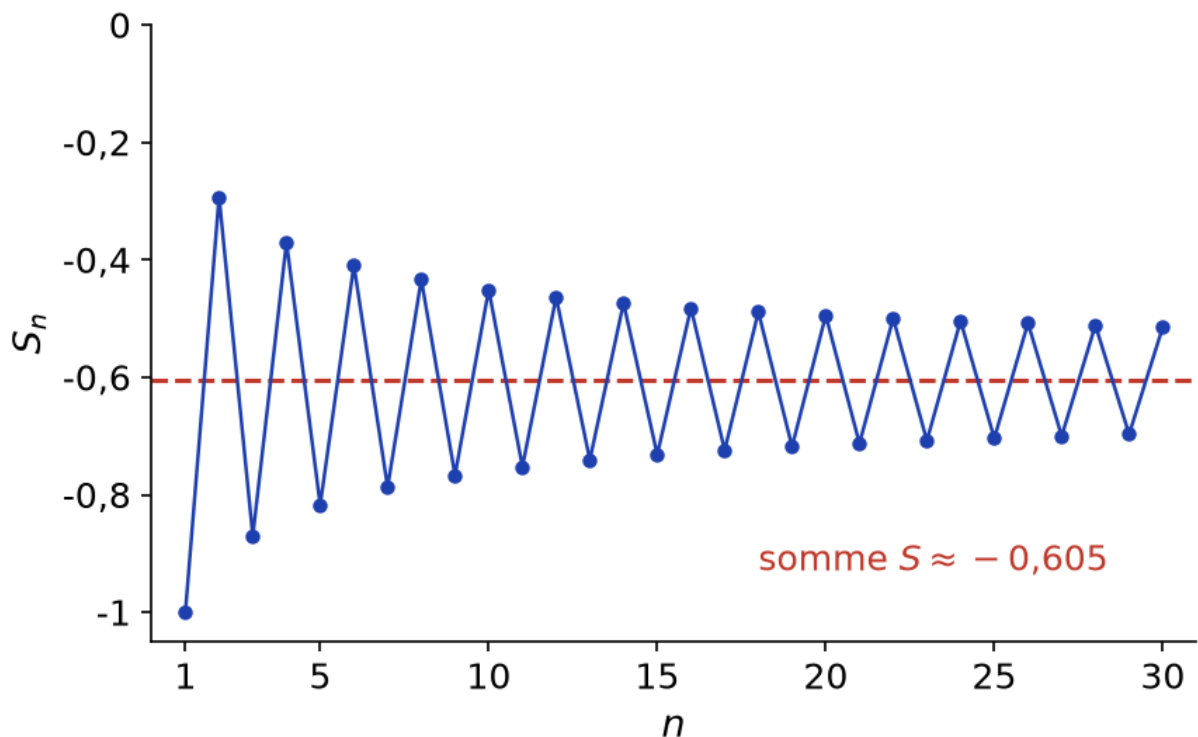
Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point (0,5 par inégalité) ; c) 1,5 point (0,5 pour l'encadrement, 0,5 pour la divergence, 0,5 pour l'équivalent) ; d) 1 point.

Exercice 4 : Une série alternée et un piège des équivalents (3,5 points)

a. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante et tend vers 0. D'après le théorème des séries alternées,

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **converge.** En revanche, $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{n^{1/2}}$ et la série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$ diverge : **la convergence n'est pas absolue.**

b. Le théorème des séries alternées précise aussi le reste : R_n **est du signe de son premier terme $(-1)^{n+1}$, et $|R_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.**



La figure montre les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$: elles encadrent alternativement la somme, et l'écart à la somme (qui vaut $-R_n$) décroît comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

- c. Pour $n \geq 2$, $\sqrt{n} + (-1)^n \geq \sqrt{2} - 1 > 0$, donc v_n est bien défini. Posons $h = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$. Alors $v_n = \frac{h}{1+h}$, et $\frac{1}{1+h} = 1 - h + O(h^2)$. Donc $v_n = h - h^2 + O(h^3)$ avec $h^2 = \frac{1}{n}$ et $|h|^3 = \frac{1}{n^{3/2}}$:

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (question a). La série des $o(n^{-3/2})$ converge absolument par comparaison à une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2} > 1$. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Une somme de deux séries convergentes et d'une série divergente diverge : $\sum v_n$ **diverge**.

- d. D'après c), $v_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, donc $v_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Pourtant l'une des séries converge et l'autre diverge. Il n'y a pas de contradiction : **le théorème de comparaison par équivalents ne s'applique qu'à des séries de signe constant** (au moins à partir d'un certain

rang), ce qui n'est pas le cas ici.

Barème : a) 1 point (0,5 pour le théorème des séries alternées, 0,5 pour la non-convergence absolue) ; b) 0,5 point ; c) 1,5 point (0,75 pour le développement, 0,75 pour la conclusion) ; d) 0,5 point.

Exercice 5 : Familles sommables et produit de Cauchy (5,5 points)

- a. La famille est à termes positifs. D'après le théorème de Fubini positif, sa somme dans $[0, +\infty]$ vaut

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 q^2} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^2.$$

Cette somme est finie : **la famille est sommable, de somme $\frac{\pi^4}{36}$.**

- b. Les couples de I_n sont $(p, n-p)$ pour $p \in \{1, \dots, n-1\}$: $\text{card } I_n = n-1$. Les I_n , $n \geq 2$, forment une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$. La famille est à termes positifs, donc le théorème de sommation par paquets positif s'applique :

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(p+q)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

La séparation est licite car les deux séries convergent. On obtient $\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) - (\zeta(3) - 1)$, qui est fini. **La famille est sommable, de somme $\frac{\pi^2}{6} - \zeta(3)$.**

- c. Par sommation par paquets positive, sa somme dans $[0, +\infty]$ vaut $\sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{n^2}$. Or $\frac{n-1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$, terme général positif d'une série divergente. **La somme est $+\infty$: la famille n'est pas sommable.**

- d. Théorème : si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \text{ converge absolument et } \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

Les séries $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{b^n}{n!}$ convergent absolument (la série exponentielle $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ converge pour tout z). Leur produit de Cauchy a pour terme général, par la formule du binôme :

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

Donc $\exp(a) \exp(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \exp(a+b).$

e. Comme $|x| < 1$, la série géométrique $\sum x^n$ converge absolument, de somme $\frac{1}{1-x}$. Son produit de Cauchy avec elle-même a pour terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = (n+1) x^n. \text{ D'après le théorème rappelé en d) :}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Barème : a) 1 point (0,5 pour Fubini positif, 0,5 pour la somme) ; b) 1,5 point (0,5 pour le cardinal, 0,5 pour la sommation par paquets, 0,5 pour la somme) ; c) 0,5 point ; d) 1,5 point (0,5 pour l'énoncé, 0,5 pour le binôme, 0,5 pour la conclusion) ; e) 1 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : séries numériques et familles sommables

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Séries numériques](#) » en maths sup et « [Familles sommables](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés séries numériques, familles sommables**.

Retrouvez tous les [**contrôles de maths sup** classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).