

Corrigé du contrôle de maths sup : produit scalaire et projection orthogonale

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours	3 points
Exercice 2 : Deux produits scalaires	4 points
Exercice 3 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt	4 points
Exercice 4 : Projection orthogonale sur un plan	4 points
Exercice 5 : Un problème de moindres carrés	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

- a. **Inégalité de Cauchy-Schwarz.** Pour tous $x, y \in E$, $|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|$, avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration : si $y = 0$, les deux membres sont nuls et la famille (x, y) est liée. Supposons donc $y \neq 0$. Pour tout réel λ , par bilinéarité et symétrie,

$$|x + \lambda y|^2 = |y|^2 \lambda^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + |x|^2 \geq 0.$$

Ce trinôme du second degré en λ (car $|y|^2 > 0$) garde un signe constant. Son discriminant est donc négatif ou nul : $4\langle x, y \rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$, ce qui donne l'inégalité.

Cas d'égalité : si $x = \mu y$, on vérifie directement que $|\langle x, y \rangle| = |\mu| |y|^2 = |x| |y|$.
Réciproquement, s'il y a égalité, le discriminant est nul. Le trinôme a alors une racine λ_0 , d'où $|x + \lambda_0 y| = 0$. Par le caractère défini du produit scalaire, $x = -\lambda_0 y$: la famille est liée.

b. D'après le procédé de Gram-Schmidt, F admet une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$. Soit

$x \in E$; posons $y = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle e_k \in F$ et $z = x - y$. Pour tout j ,
 $\langle z, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0$ car la base est orthonormée. Ainsi z est orthogonal à une base de F , donc à F : $z \in F^\perp$. On a donc $E = F + F^\perp$. Enfin, si $x \in F \cap F^\perp$, alors $\langle x, x \rangle = 0$, donc $x = 0$. Par conséquent, $E = F \oplus F^\perp$.

Barème : a) 2 points : 0,5 point pour l'énoncé complet, 1 point pour la preuve par le trinôme, 0,5 point pour le cas d'égalité ; b) 1 point : 0,5 point pour la décomposition, 0,5 point pour l'intersection nulle.

Exercice 2 : Deux produits scalaires (4 points)

a. L'application est bien définie, car PQ est continue sur $[0, 1]$. Elle est symétrique, car $PQ = QP$. Elle est linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale, donc bilinéaire grâce à la symétrie. Elle est positive : $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

Montrons enfin qu'elle est définie. Si $\langle P, P \rangle = 0$, la fonction $t \rightarrow P(t)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$. Elle est donc nulle sur $[0, 1]$. Ainsi le polynôme P a une infinité de racines, d'où $P = 0$. C'est donc bien **un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$** .

b. Le coefficient (j, j) de $A^\top B$ vaut $\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ij}$, donc

$$\text{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

Cette expression est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$ appliqué aux coefficients de A et de B . Elle est donc symétrique et bilinéaire. De plus, $\text{tr}(A^\top A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$, et cette

somme de carrés est nulle si et seulement si tous les a_{ij} sont nuls, c'est-à-dire $A = 0$. Il s'agit donc bien d'un **produit scalaire sur** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- c. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à A et I_n pour ce produit scalaire. D'une part, $\langle A, I_n \rangle = \text{tr}(A^T) = \text{tr } A$; d'autre part, $|I_n|^2 = \text{tr}(I_n) = n$. On obtient $(\text{tr } A)^2 \leq \text{tr}(A^T A) \times n$, soit $(\text{tr } A)^2 \leq n \text{tr}(A^T A)$. D'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, il y a égalité si et seulement si A et I_n sont colinéaires, c'est-à-dire **si et seulement si** $A = \lambda I_n$ **avec** $\lambda \in \mathbb{R}$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la bilinéarité et la symétrie, 1 point pour le caractère défini (continuité et infinité de racines) ; b) 1,5 point : 0,5 point pour l'expression en coefficients, 1 point pour les propriétés ; c) 1 point : 0,5 point pour l'inégalité, 0,5 point pour le cas d'égalité.

Exercice 3 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt (4 points)

- a. Le déterminant de la famille dans la base canonique vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (0 - 1) - 1 \times (1 - 0) + 0 = -2 \neq 0.$$

La famille est donc libre ; formée de trois vecteurs en dimension 3, c'est une base.

Premier vecteur. $|u_1| = \sqrt{2}$, donc $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

Deuxième vecteur. On a $\langle u_2, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Posons donc

$$v_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right). \text{ Alors } |v_2|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}, \text{ et l'on obtient } e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2).$$

Troisième vecteur. On a $\langle u_3, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\langle u_3, e_2 \rangle = \frac{0 - 1 + 2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Par conséquent,

$$v_3 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{1}{6}(1, -1, 2) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

et, après normalisation, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$.

Vérification : les produits scalaires deux à deux sont proportionnels à $1 - 1 + 0$, $-1 + 1 + 0$ et $-1 - 1 + 2$, tous nuls. La base orthonormée cherchée est donc $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$. Enfin, $\langle e_k, u_k \rangle = |u_k| > 0$ par construction.

b. Dans une base orthonormée, les coordonnées de w sont les produits scalaires $\langle w, e_k \rangle$:

$$\langle w, e_1 \rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad \langle w, e_2 \rangle = \frac{2+0+2}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}, \quad \langle w, e_3 \rangle = \frac{-2+0+1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Les coordonnées de w sont donc $\left(\sqrt{2}, \frac{4}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Vérification par le théorème de Pythagore : $2 + \frac{16}{6} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 5$, et en effet $|w|^2 = 4 + 0 + 1 = 5$.

Erreur fréquente : écrire $v_2 = u_2 - \langle u_2, u_1 \rangle u_1$ en oubliant de diviser par $|u_1|^2 = 2$: le vecteur obtenu, $(0, -1, 1)$, n'est alors pas orthogonal à u_1 .

Barème : a) 2,5 points : 0,5 point pour la base, 0,5 point pour e_1 , 0,75 point pour e_2 , 0,75 point pour e_3 ; b) 1,5 point : 1 point pour les coordonnées, 0,5 point pour la vérification.

Exercice 4 : Projection orthogonale sur un plan (4 points)

a. Le plan P est l'ensemble des vecteurs u tels que $\langle u, n \rangle = 0$, c'est-à-dire $P = \text{Vect}(n)^\perp$. En dimension finie, $(F^\perp)^\perp = F$, donc $P^\perp = \text{Vect}(n)$, la droite dirigée par $(1, 2, 2)$.

b. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ et $v = u - \frac{\langle u, n \rangle}{9} n$. Comme $|n|^2 = 1 + 4 + 4 = 9$, on a $\langle v, n \rangle = \langle u, n \rangle - \langle u, n \rangle = 0$, donc $v \in P$. De plus, $u - v$ est colinéaire à n , donc appartient à $P^\perp$. Par unicité de la décomposition $u = v + (u - v)$ dans $\mathbb{R}^3 = P \oplus P^\perp$, on obtient $v = p(u)$.

Matriciellement, $p(u) = u - \frac{1}{9} n n^T u$, donc $M = I_3 - \frac{1}{9} n n^T$, avec $n n^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

c. La matrice M est visiblement symétrique : $M^T = M$. Ensuite, $(n n^T)^2 = n (n^T n) n^T = 9 n n^T$, d'où

$$M^2 = I_3 - \frac{2}{9} n n^T + \frac{1}{81} \times 9 n n^T = I_3 - \frac{1}{9} n n^T = M.$$

Enfin, $\text{tr } M = \frac{8+5+5}{9} = 2$. Pour un projecteur, la trace est égale au rang : on retrouve que P est de rang 2, son image étant le plan P .

d. On a $\langle u, n \rangle = 3 + 6 + 0 = 9$, donc $p(u) = (3, 3, 0) - (1, 2, 2)$, soit $p(u) = (2, 1, -2)$. On vérifie que $2 + 2 - 4 = 0$, donc $p(u) \in P$. La distance de u à P vaut $|u - p(u)| = |(1, 2, 2)| = 3$: $d(u, P) = 3$. On retrouve la formule $d(u, P) = \frac{|\langle u, n \rangle|}{|n|} = \frac{9}{3}$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 1 point pour la justification de la formule, 0,5 point pour la matrice ; c) 1 point : 0,5 point pour $M^2 = M$ et $M^T = M$, 0,5 point pour la trace interprétée ; d) 1 point : 0,5 point pour le projeté, 0,5 point pour la distance.

Exercice 5 : Un problème de moindres carrés (5 points)

a. Pour tout couple (a, b) , $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = |X^2 - (aX + b)|^2$. Lorsque (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$, le polynôme $aX + b$ décrit exactement F . Donc $m = \inf_{Q \in F} |X^2 - Q|^2 = d(X^2, F)^2$. Comme F est de dimension finie, le cours affirme que cette distance est atteinte en un unique point : le projeté orthogonal $\pi(X^2)$ de X^2 sur F . En effet, pour tout $Q \in F$, le théorème de Pythagore donne

$|X^2 - Q|^2 = |X^2 - \pi(X^2)|^2 + |\pi(X^2) - Q|^2$. Le minimum est donc atteint pour l'unique (a, b) tel que $aX + b = \pi(X^2)$.

- b. Le polynôme $aX + b$ est le projeté de X^2 sur F si et seulement si $X^2 - aX - b$ est orthogonal à 1 et à X , qui engendrent F . Avec $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$, ces deux conditions s'écrivent :

$$\langle X^2 - aX - b, 1 \rangle = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} - b = 0 ;$$

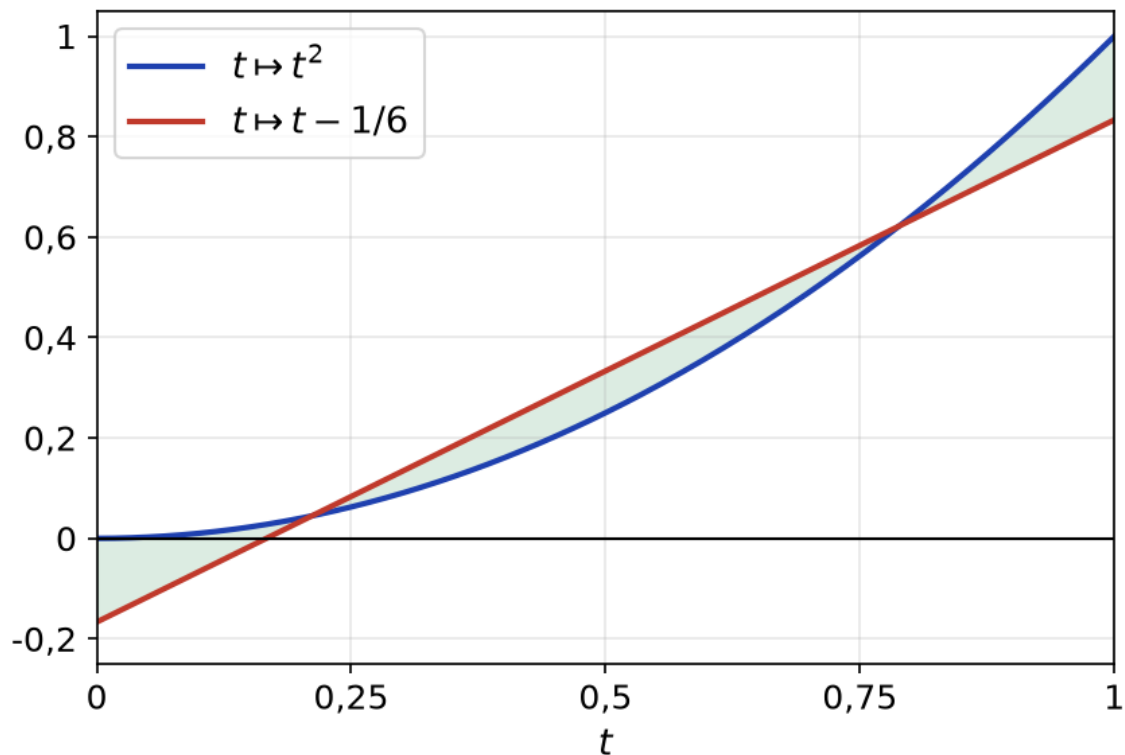
$$\langle X^2 - aX - b, X \rangle = \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0 .$$

La première équation donne $b = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}$. En reportant dans la seconde, $\frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{1}{6} + \frac{a}{4} = \frac{1}{12} - \frac{a}{12} = 0$, donc $a = 1$, puis $b = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$. Ainsi, $(a, b) = (1, -\frac{1}{6})$ et $\pi(X^2) = X - \frac{1}{6}$.

- c. Notons $R = X^2 - X + \frac{1}{6}$. Comme R est orthogonal à F et que $X - \frac{1}{6} \in F$, on a $|R|^2 = \langle R, X^2 \rangle - \langle R, X - \frac{1}{6} \rangle = \langle R, X^2 \rangle$. Donc

$$m = \int_0^1 \left(t^4 - t^3 + \frac{t^2}{6} \right) dt = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} = \frac{36 - 45 + 10}{180}.$$

On obtient $m = \frac{1}{180}$. La figure montre que la droite $t \rightarrow t - \frac{1}{6}$ approche bien la parabole au sens des moindres carrés : l'aire entre les courbes est petite et répartie de part et d'autre.



d. Appliquons Gram-Schmidt à $(1, X)$. D'abord, $\|1\|^2 = 1$, donc $f_0 = 1$. Ensuite,

$$X - \langle X, 1 \rangle 1 = X - \frac{1}{2}, \text{ et } \|X - \frac{1}{2}\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12}. \text{ D'où}$$

$f_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \left(X - \frac{1}{2}\right)$. Le projeté vaut alors $\pi(X^2) = \langle X^2, f_0 \rangle f_0 + \langle X^2, f_1 \rangle f_1$, avec $\langle X^2, f_0 \rangle = \frac{1}{3}$ et $\langle X^2, X - \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Par conséquent,

$$\pi(X^2) = \frac{1}{3} + 12 \times \frac{1}{12} \left(X - \frac{1}{2}\right) = X - \frac{1}{6}.$$

On retrouve bien $\pi(X^2) = X - \frac{1}{6}$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la traduction en distance, 0,5 point pour l'existence et l'unicité citées ; b) 1,5 point : 0,5 point pour les conditions d'orthogonalité, 1 point pour la résolution ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la réduction à $\langle R, X^2 \rangle$ ou le développement du carré, 1 point pour 1/180 ; d) 1 point : 0,5 point pour la base orthonormée, 0,5 point pour le projeté.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : produit scalaire et projection orthogonale

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Espaces préhilbertiens réels](#) » en maths [sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces préhilbertiens réels](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).