

Corrigé du contrôle de maths sup : problème d'algèbre linéaire type concours

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours	3 points
Exercice 2 : Partie A, un endomorphisme de $\mathbb{R}^n[X]$	4 points
Exercice 3 : Partie B, noyau, image et rang	4 points
Exercice 4 : Partie C, une base adaptée	5 points
Exercice 5 : Partie D, applications	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

- a. **Théorème du rang.** Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } f$ est de dimension finie et $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$.

Démonstration : comme E est de dimension finie, le sous-espace $\text{Ker } f$ admet un supplémentaire S dans E , et $\dim S = \dim E - \dim \text{Ker } f$. Notons $f_S : S \rightarrow \text{Im } f$ la restriction de f à S , à l'arrivée dans $\text{Im } f$. Elle est linéaire.

D'abord, f_S est injective : si $s \in S$ et $f(s) = 0$, alors $s \in S \cap \text{Ker } f = \{0\}$. Ensuite, f_S est surjective : tout $y \in \text{Im } f$ s'écrit $y = f(x)$; on décompose $x = x_K + s$

avec $x_K \in \text{Ker } f$ et $s \in S$, et alors $y = f(s)$. Ainsi, f_S est un isomorphisme de S sur $\text{Im } f$. Par conséquent, $\text{rg } f = \dim S$, d'où $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$.

- b. Soit $B = Q^{-1} A Q$ avec Q inversible. Comme $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$ pour toutes matrices carrées de même taille, on a
 $\text{tr}(B) = \text{tr}(Q^{-1}(A Q)) = \text{tr}((A Q)Q^{-1}) = \text{tr}(A)$. De plus, le déterminant est multiplicatif, donc $\det B = \det(Q)^{-1} \det A \det Q = \det A$. **Deux matrices semblables ont donc même trace et même déterminant.**

Barème : a) 2 points : 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour le supplémentaire, 1 point pour l'isomorphisme justifié ; b) 1 point : 0,5 point pour la trace, 0,5 point pour le déterminant.

Exercice 2 : Partie A, un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (4 points)

- a. La dérivation est linéaire, ainsi que la multiplication par un polynôme fixé. Par composition et somme, u est donc linéaire. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$; alors $\deg P'' \leq n - 2$, donc $\deg((X^2 - 1)P'') \leq n$. De même, $\deg(X P') \leq n$. Ainsi $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, et u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- b. Pour $k \geq 2$, $(X^k)'' = k(k-1)X^{k-2}$ et $(X^k)' = kX^{k-1}$, donc

$$u(X^k) = k(k-1)(X^k - X^{k-2}) + kX^k = k^2 X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

Pour $k = 0$, $u(1) = 0$; pour $k = 1$, $u(X) = X$. La formule reste donc valable, puisque $k(k-1) = 0$ dans ces deux cas.

Ainsi, A est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $0, 1, 4, \dots, n^2$. Ses seuls autres coefficients non nuls sont $-k(k-1)$, placés en ligne $k-2$ et colonne k (en numérotant de 0 à n). Pour $n = 3$, avec $u(X^2) = 4X^2 - 2$ et $u(X^3) = 9X^3 - 6X$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

c. La trace et le déterminant de u sont ceux de sa matrice A , triangulaire. D'une part,

$\text{tr } u = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'autre part, le déterminant est le produit des coefficients diagonaux, dont le premier est nul : $\det u = 0$.

d. On a $u(1) = 0$ avec $1 \neq 0$: u **n'est pas injectif**, donc ce n'est pas un automorphisme. On le retrouve avec $\det u = 0$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la linéarité, 0,5 point pour la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$; b) 1,5 point : 0,5 point pour le calcul de $u(X^k)$, 0,5 point pour la forme de A , 0,5 point pour la matrice avec $n = 3$; c) 1 point : 0,5 point pour la trace, 0,5 point pour le déterminant ; d) 0,5 point.

Exercice 3 : Partie B, noyau, image et rang (4 points)

a. Écrivons $P = a_d X^d + R$ avec $\deg R < d$. D'après A b),

$u(X^d) = d^2 X^d + (\text{termes de } \deg[?][?] < d)$, et $u(R) \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ par le même calcul. Donc $u(P)$ **est de degré d , de coefficient dominant $d^2 a_d$** , qui est non nul puisque $d \geq 1$. En particulier, $u(P) \neq 0$ pour tout polynôme non constant. Réciproquement, $u(c) = 0$ pour toute constante c . Ainsi, $\text{Ker } u = \mathbb{R}_0[X]$.

b. D'après le théorème du rang, $\text{rg } u = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Ker } u = (n+1) - 1$, donc $\text{rg } u = n$.

c. La fonction g est de classe C^2 comme composée. En dérivant, $g'(\theta) = -\sin \theta P'(\cos \theta)$, puis

$$g''(\theta) = -\cos \theta P'(\cos \theta) + \sin^2 \theta P''(\cos \theta).$$

Comme $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, on obtient

$-g''(\theta) = (\cos^2 \theta - 1)P''(\cos \theta) + \cos \theta P'(\cos \theta)$. Autrement dit,

$$u(P)(\cos\theta) = -g''(\theta).$$

- d. La linéarité de φ découle de celle de l'intégrale. De plus, $\varphi(1) = 1$, donc φ n'est pas nulle. Son noyau est alors un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, de dimension n .

Soit $Q = u(P) \in \text{Im } u$. D'après c),

$$\varphi(Q) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g''(\theta) d\theta = -\frac{1}{\pi} (g'(\pi) - g'(0)) = 0,$$

car $g'(\theta) = -\sin\theta P'(\cos\theta)$ s'annule en 0 et en π . Donc $\text{Im } u \subset \text{Ker } \varphi$. Ces deux sous-espaces ont la même dimension n , d'après b). Par conséquent, $\text{Im } u = \text{Ker } \varphi$.

Vérification : $u(X^2) = 4X^2 - 2$ et $\varphi(X^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}$, donc

$$\varphi(u(X^2)) = 4 \times \frac{1}{2} - 2 = 0.$$

Erreur fréquente : affirmer $\text{Im } u \subset \text{Ker } \varphi$ puis conclure à l'égalité sans comparer les dimensions.

Barème : a) 1,5 point : 1 point pour le degré et le coefficient dominant, 0,5 point pour le noyau ; b) 0,5 point ; c) 1 point : 0,5 point pour chaque dérivée ; d) 1 point : 0,25 point pour la forme linéaire non nulle, 0,5 point pour l'inclusion, 0,25 point pour l'argument de dimension.

Exercice 4 : Partie C, une base adaptée (5 points)

- a. D'après B a), si $Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ est de degré $d \leq k-1$, alors $u(Q)$ est de degré au plus d . Donc $v(Q) = u(Q) - k^2 Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$: le sous-espace $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ est stable par v .

Montrons que l'endomorphisme induit est injectif. Soit $Q \neq 0$, de degré $d \leq k-1$ et de coefficient dominant q_d . D'après A b), le coefficient de X^d dans $v(Q)$ vaut $(d^2 - k^2) q_d$. Il est non nul, car $0 \leq d < k$. Donc $v(Q) \neq 0$. Un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie est bijectif : **v induit un automorphisme de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.**

Un polynôme unitaire de degré k s'écrit de façon unique $P = X^k + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. On a alors $u(P) = k^2 P$ si et seulement si $v(X^k) + v(Q) = 0$. Or, d'après A b), $v(X^k) = -k(k-1)X^{k-2} \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. La condition équivaut donc à $v(Q) = k(k-1)X^{k-2}$. Comme v induit une bijection de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, cette équation a une unique solution Q . Il existe donc **un unique polynôme unitaire P_k de degré k tel que $u(P_k) = k^2 P_k$** .

- b. Pour $k = 1$, l'équation s'écrit $v(Q) = 0$, donc $Q = 0$ et $P_1 = X$; en effet, $u(X) = X$.

Pour $k = 2$, cherchons $P_2 = X^2 + aX + c$. On a $u(P_2) = 4X^2 - 2 + aX$, et $u(P_2) = 4P_2$ équivaut à $a = 4a$ et $-2 = 4c$. D'où $a = 0$, $c = -\frac{1}{2}$, et $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$.

Pour $k = 3$, cherchons $P_3 = X^3 + bX^2 + aX + c$. On a $u(P_3) = 9X^3 - 6X + b(4X^2 - 2) + aX$. L'égalité $u(P_3) = 9P_3$ donne $4b = 9b$, $a - 6 = 9a$ et $-2b = 9c$, d'où $b = 0$, $a = -\frac{3}{4}$ et $c = 0$. Ainsi, $P_3 = X^3 - \frac{3}{4}X$.

- c. La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est échelonnée en degré ($\deg P_k = k$). Elle est donc libre, et elle compte $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs : c'est une base. Comme $u(P_k) = k^2 P_k$ pour tout k (y compris $k = 0$, puisque $u(1) = 0$), $D = \text{diag}(0, 1, 4, \dots, n^2)$.

Pour $n = 3$, les colonnes de Q sont les coordonnées de P_0, P_1, P_2, P_3 dans $\mathcal{B}$. Les relations $X^2 = P_2 + \frac{1}{2}P_0$ et $X^3 = P_3 + \frac{3}{4}P_1$ donnent l'inverse :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & , & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule de changement de base, $D = Q^{-1} A Q$, soit $A = Q D Q^{-1}$.

Vérification sur la dernière colonne :

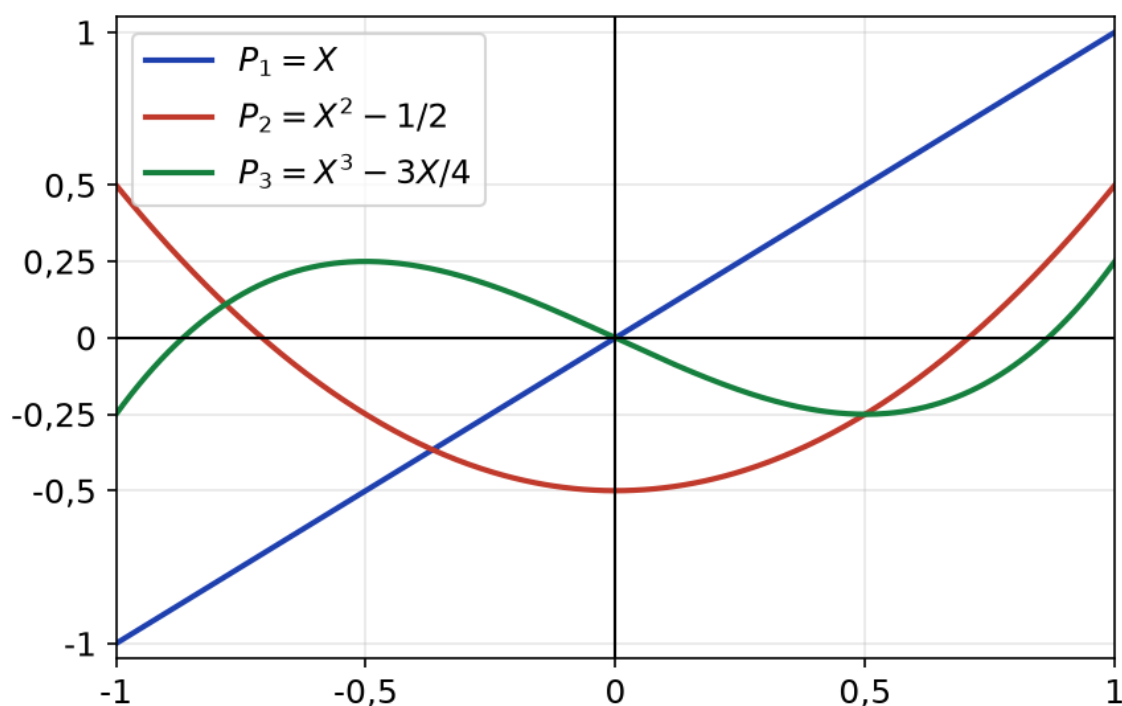
$$A \times (0, -\frac{3}{4}, 0, 1)^T = (0, -\frac{27}{4}, 0, 9)^T = 9 \times (0, -\frac{3}{4}, 0, 1)^T.$$

d. Appliquons B c) à $P = T_k$: ici $g(\theta) = \cos(k\theta)$, donc

$u(T_k)(\cos\theta) = -g''(\theta) = k^2 \cos(k\theta) = k^2 T_k(\cos\theta)$. Les polynômes $u(T_k)$ et $k^2 T_k$ coïncident donc sur $[-1, 1]$, ensemble infini : ils sont égaux, et $u(T_k) = k^2 T_k$.

Le polynôme $2^{1-k} T_k$ est unitaire de degré k et vérifie la même relation. Par l'unicité de a),

$P_k = \frac{T_k}{2^{k-1}}$. Par exemple, $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$ redonnent P_2 et P_3 . En particulier, $|P_k(x)| \leq 2^{1-k}$ sur $[-1, 1]$, comme le montre la figure.



Barème : a) 2 points : 0,5 point pour la stabilité, 0,75 point pour l'injectivité et la bijectivité, 0,75 point pour l'existence et l'unicité de P_k ; b) 1 point : 0,5 point pour P_2 , 0,5 point pour P_3 ; c) 1 point : 0,25 point pour la base, 0,25 point pour D , 0,5 point pour Q , Q^{-1} et la relation ; d) 1 point : 0,5 point pour $u(T_k) = k^2 T_k$, 0,5 point pour P_k .

Exercice 5 : Partie D, applications (4 points)

- a. Le changement de variable $\theta \rightarrow \pi - \theta$ transforme $\cos^3 \theta$ en $-\cos^3 \theta$, donc $\varphi(X^3) = 0$. D'après B d), $X^3 \in \text{Ker } \varphi = \text{Im } u$: l'équation admet des solutions.

D'après C c), $X^3 = P_3 + \frac{3}{4}P_1$. Écrivons $P = \sum_{k=0}^3 c_k P_k$; alors

$u(P) = c_1 P_1 + 4c_2 P_2 + 9c_3 P_3$. Par unicité des coordonnées dans la base (P_k) , on a $u(P) = X^3$ si et seulement si $9c_3 = 1$, $4c_2 = 0$ et $c_1 = \frac{3}{4}$, avec c_0 quelconque. Les solutions sont donc

$$P = \frac{1}{9}\left(X^3 - \frac{3}{4}X\right) + \frac{3}{4}X + c = \frac{1}{9}X^3 + \frac{2}{3}X + c.$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{1}{9}X^3 + \frac{2}{3}X + c \mid c \in \mathbb{R}\right\}$. Vérification :

$$u\left(\frac{1}{9}X^3\right) = X^3 - \frac{2}{3}X \text{ et } u\left(\frac{2}{3}X\right) = \frac{2}{3}X, \text{ dont la somme vaut } X^3.$$

- b. L'inclusion $\text{Vect}(P_k) \subset \text{Ker}(u - k^2 \text{id})$ est claire. Inversement, soit $P \neq 0$ tel que $u(P) = k^2 P$, de degré d et de coefficient dominant a_d . Si $d \geq 1$, B a) donne $d^2 a_d = k^2 a_d$, donc $d = k$. Si $d = 0$, alors $u(P) = 0 = k^2 P$, donc $k = 0$ et $P \in \text{Vect}(P_0)$. Dans le premier cas, $\frac{P}{a_d}$ est unitaire de degré k et vérifie la relation, donc vaut P_k par l'unicité de C a). Ainsi, $\text{Ker}(u - k^2 \text{id}) = \text{Vect}(P_k)$.

Soit w qui commute avec u . Alors $u(w(P_k)) = w(u(P_k)) = k^2 w(P_k)$, donc $w(P_k) \in \text{Vect}(P_k)$: la matrice de w dans la base $(P_0, \dots, P_n)$ est diagonale.

Réciproquement, deux matrices diagonales commutent, donc un tel w commute avec u , dont la matrice D est diagonale. **Les endomorphismes qui commutent avec u sont exactement ceux dont la matrice dans $(P_0, \dots, P_n)$ est diagonale.** Ils forment un espace isomorphe à celui des matrices diagonales, de **dimension** $n + 1$.

- c. Dans la base (P_k) , la matrice de $u + \text{id}$ est $D + I_{n+1} = \text{diag}(1, 2, 5, \dots, n^2 + 1)$.
Donc $\det(u + \text{id}) = \prod_{k=0}^n (k^2 + 1)$. Pour $n = 3$, on obtient $1 \times 2 \times 5 \times 10$, soit **100**.
Ce déterminant est non nul, donc $u + \text{id}$ **est inversible**.

(P_k) , 0,25 point pour l'ensemble des solutions ; b) 1,5 point : 0,5 point pour le noyau, 0,5 point pour la stabilité des droites, 0,5 point pour la réciproque et la dimension ; c) 1 point : 0,5 point pour la formule, 0,25 point pour 100, 0,25 point pour l'inversibilité.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : problème d'algèbre linéaire type concours

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Applications linéaires » en maths sup](#) et [« Matrices et applications linéaires » en maths sup](#) et [« Groupe symétrique et déterminants » en maths sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [applications linéaires](#), [matrices et applications linéaires](#), [groupe symétrique et déterminants](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths sup sur ce thème

- [Contrôle de maths sup : applications linéaires et théorème du rang](#)
- [Contrôle de maths sup : hyperplans, matrices et changements de base](#)
- [Contrôle de maths sup : permutations et déterminants](#)