Corrigé du contrôle de maths sup : probabilités finies, espérance et variance

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours	3 points
Exercice 2 : Un test de dépistage	3 points
Exercice 3 : Couple de variables et indépendance	4 points
Exercice 4 : Estimer une proportion	4 points
Exercice 5 : Points fixes d'une permutation aléatoire	6 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

a. **Formule des probabilités totales.** Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B, $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\, P_{A_k}(B)$.

Démonstration : les A_k sont deux à deux incompatibles et leur réunion est Ω. Donc B est la réunion des événements deux à deux incompatibles $B \cap A_k$. Par additivité, $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)$. Comme $P(A_k) > 0$, la définition de la probabilité conditionnelle donne $P(B \cap A_k) = P(A_k)\, P_{A_k}(B)$, d'où la formule.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Formule de Bayes. Si de plus $P(B) > 0$, alors pour tout k,

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k)\, P_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(B)}.$$

En effet, $P_B(A_k) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$. Il suffit alors d'écrire le numérateur $P(A_k)\, P_{A_k}(B)$ et de remplacer le dénominateur par la formule des probabilités totales.

b. **Inégalité de Markov.** Si X est une variable aléatoire réelle positive et $a > 0$, alors $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

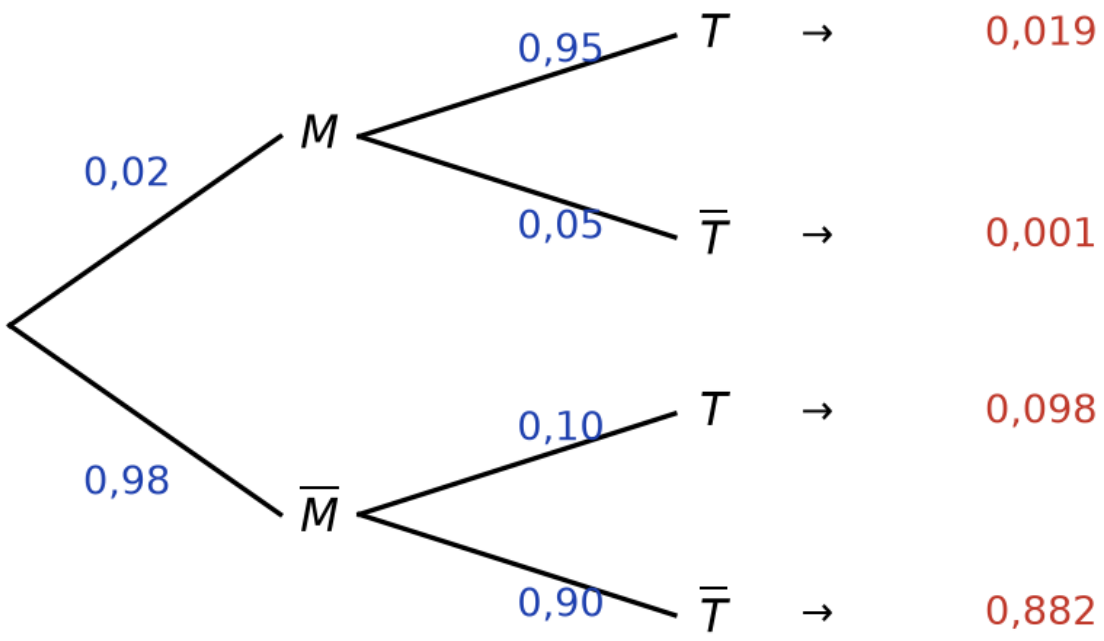
Démonstration : notons $1_{\{X \geq a\}}$ l'indicatrice de l'événement $\{X \geq a\}$. Comme $X \geq 0$, on a en tout point $X \geq a\, 1_{\{X \geq a\}}$. Par croissance et linéarité de l'espérance, $E(X) \geq a\, E(1_{\{X \geq a\}}) = a\, P(X \geq a)$, ce qui donne l'inégalité.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour toute variable aléatoire réelle X et tout $\varepsilon > 0$, $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$. En effet, les événements $\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\}$ et $\{(X, E(X))^2 \geq [\backslash varepsilolon?]^2\}$ sont égaux. On applique donc Markov à la variable positive $(X - E(X))^2$, dont l'espérance est $V(X)$, avec $a = \varepsilon^2$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour chaque énoncé, 0,5 point pour les démonstrations ; b) 1,5 point : 0,5 point pour l'énoncé de Markov, 0,5 point pour sa preuve par l'indicatrice, 0,5 point pour Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 2 : Un test de dépistage (3 points)

L'énoncé donne $P(M) = 0{,}02$, $P_M(T) = 0{,}95$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}90$, donc $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}10$. L'arbre ci-dessous résume la situation, avec la probabilité de chaque chemin.



a. Le couple $(M, \overline{M})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M)\,P_M(T) + P(\overline{M})\,P_{\overline{M}}(T) = 0{,}02 \times 0{,}95 + 0{,}98 \times 0{,}10 = 0{,}019 + 0{,}098.$$

Ainsi, $P(T) = 0{,}117$.

b. D'après la formule de Bayes,

$$P_T(M) = \frac{P(M)\,P_M(T)}{P(T)} = \frac{0{,}019}{0{,}117} = \frac{19}{117}.$$

Or $117 \times 0{,}16 = 18{,}72$ et $117 \times 0{,}17 = 19{,}89$, donc $P_T(M) = \frac{19}{117} \approx 0{,}16$. Autrement dit, une personne positive a seulement environ une chance sur six d'être malade. En effet, la maladie est rare : les faux positifs, issus des $98\,\%$ de personnes saines, sont bien plus nombreux que les vrais positifs.

c. Par indépendance conditionnelle, $P_M(T_1 \cap T_2) = 0{,}95^2 = 0{,}9025$ et $P_{\overline{M}}(T_1 \cap T_2) = 0{,}10^2 = 0{,}01$. Par la formule de Bayes :

$$P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{0{,}02 \times 0{,}9025}{0{,}02 \times 0{,}9025 + 0{,}98 \times 0{,}01} = \frac{0{,}01805}{0{,}02785} = \frac{1805}{2785} = \frac{361}{557}.$$

Comme $557 \times 0{,}65 = 362{,}05$, on obtient $P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{361}{557} \approx 0{,}65$. Le second test positif fait donc passer la probabilité d'être malade d'environ $16\,\%$ à environ $65\,\%$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Erreur fréquente : confondre $P_T(M)$ avec $P_M(T) = 0{,}95$, c'est-à-dire la probabilité recherchée avec la sensibilité du test.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la formule des probabilités totales citée, 0,5 point pour 0,117 ; b) 1 point : 0,5 point pour Bayes, 0,25 point pour la valeur approchée, 0,25 point pour le commentaire ; c) 1 point : 0,5 point pour l'indépendance conditionnelle, 0,5 point pour 361/557 et sa valeur approchée.

Exercice 3 : Couple de variables et indépendance (4 points)

a. Par indépendance des dés, chacun des 16 couples (D_1, D_2) a pour probabilité $\frac{1}{16}$. Soit $i, j \in [\![1, 4]\!]$. Si $i > j$, l'événement $\{X = i, Y = j\}$ est impossible, car le minimum ne dépasse pas le maximum. Si $i = j$, il correspond au seul couple (i, i). Enfin, si $i < j$, il correspond aux deux couples (i, j) et (j, i). On obtient le tableau suivant, où la case de la ligne i et de la colonne j contient $P(X = i, Y = j)$:

$X \setminus Y$	1	2	3	4	loi de X
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
loi de Y	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

La somme des seize cases vaut bien $\frac{4 \times 1 + 6 \times 2}{16} = 1$.

b. Les lois marginales s'obtiennent en sommant les lignes et les colonnes : $P(X = i) = \frac{9 - 2i}{16}$ et $P(Y = j) = \frac{2j - 1}{16}$ pour $i, j \in [\![1, 4]\!]$. Par conséquent,

$$E(X) = \frac{1 \times 7 + 2 \times 5 + 3 \times 3 + 4 \times 1}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8},$$

$$E(Y) = \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}.$$

Donc $E(X) + E(Y) = \frac{40}{8} = 5$. C'est cohérent : $X + Y = D_1 + D_2$, donc par linéarité $E(X) + E(Y) = E(D_1) + E(D_2) = 2 \times \frac{5}{2} = 5$.

c. On a $P(X = 4, Y = 1) = 0$ alors que $P(X = 4)\,P(Y = 1) = \frac{1}{256} \neq 0$. **Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.**

d. Deux des quatre faces sont paires, donc $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. La somme est paire lorsque les deux dés ont la même parité, donc $P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Ensuite, $A \cap B$ signifie « deux résultats pairs », de probabilité $\frac{1}{4}$ par indépendance des dés. De même, $A \cap C = A \cap B$ (si D_1 est pair et la somme paire, alors D_2 est pair) et $B \cap C = A \cap B$. Ainsi $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$: les événements sont **deux à deux indépendants**. En revanche, $A \cap B \cap C = A \cap B$, donc $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)\,P(B)\,P(C)$: ils **ne sont pas mutuellement indépendants**.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la justification des trois cas, 1 point pour le tableau ; b) 1 point : 0,5 point pour les lois marginales, 0,5 point pour les espérances ; c) 0,5 point pour un contre-exemple ; d) 1 point : 0,5 point pour l'indépendance deux à deux, 0,5 point pour le défaut d'indépendance mutuelle.

Exercice 4 : Estimer une proportion (4 points)

a. Notons B_k l'indicatrice de « pile au k-ième lancer ». Les B_k sont des variables de Bernoulli de paramètre p, mutuellement indépendantes, et $S_n = B_1 + \ldots + B_n$. Donc S_n **suit la loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$. Il vient $E(S_n) = np$ et $V(S_n) = np(1-p)$. Par linéarité et d'après $V(aX) = a^2\,V(X)$: $E(F_n) = p$ **et** $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

b. Pour tout réel p, $\frac{1}{4} - p(1-p) = p^2 - p + \frac{1}{4} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à F_n, d'espérance p, donne alors

$$P\left(|F_n - p| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(F_n)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

c. Avec $\varepsilon = 0{,}05$, on a $4n\varepsilon^2 = 4n \times 0{,}0025 = 0{,}01\,n$. Il suffit donc que $\frac{1}{0{,}01\,n} \leq 0{,}05$, c'est-à-dire $\frac{100}{n} \leq 0{,}05$, soit $n \geq 2000$. Ainsi, $n = 2000$ **lancers suffisent**, quelle que soit la valeur de p.

d. La fréquence observée vaut $\frac{1100}{2000} = 0{,}55$. D'après c), l'événement $|F_n - p| < 0{,}05$ a une probabilité au moins égale à $0{,}95$. On peut donc affirmer, avec un risque d'erreur au plus de $5\,\%$, que $p \in \,]0{,}50\,;\,0{,}60[$. Cet intervalle ne contient pas $\frac{1}{2}$: la pièce paraît déséquilibrée en faveur de pile.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la loi binomiale justifiée, 1 point pour $E(F_n)$ et $V(F_n)$; b) 1 point : 0,5 point pour la majoration de $p(1-p)$, 0,5 point pour Bienaymé-Tchebychev ; c) 1 point : 0,5 point pour l'inéquation, 0,5 point pour 2 000 ; d) 0,5 point pour l'intervalle et la conclusion.

Exercice 5 : Points fixes d'une permutation aléatoire (6 points)

a. Une permutation qui fixe i est déterminée par sa restriction à $[\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, qui est une permutation de cet ensemble à $n-1$ éléments. Réciproquement, toute permutation de cet ensemble se prolonge de façon unique en posant $\sigma(i) = i$. Il y a donc $(n-1)!$ permutations qui fixent i. Comme la loi est uniforme sur S_n, qui a $n!$ éléments,
$P(\sigma(i) = i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

b. On a $N = X_1 + \ldots + X_n$. Par linéarité de l'espérance,
$E(N) = \sum_{i=1}^{n} P(\sigma(i) = i) = n \times \frac{1}{n}$, d'où $E(N) = 1$, indépendamment de n.

c. De même, les permutations qui fixent i et j sont en bijection avec les permutations de $[\![1, n]\!] \setminus \{i, j\}$. Elles sont donc au nombre de $(n-2)!$, et

$$P(\sigma(i) = i \text{ et } \sigma(j) = j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Comme $X_i\,X_j$ est l'indicatrice de cet événement,

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i\,X_j) - E(X_i)\,E(X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-(n-1)}{n^2(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

Ainsi, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n^2(n-1)}$. Cette covariance est non nulle, donc X_i **et** X_j **ne**

sont pas indépendantes.

d. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$, donc $V(X_i) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$. La variance d'une somme s'écrit

$$V(N) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) avec $i < j$. Par conséquent,

$$V(N) = n \times \frac{n-1}{n^2} + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1.$$

On a donc $V(N) = 1$ pour tout $n \geq 2$.

e. Comme N est à valeurs entières, l'événement $\{N \geq 3\}$ est inclus dans $\{|N - 1| \geq 2\}$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(N \geq 3) \leq P(|N - E(N)| \geq 2) \leq \frac{V(N)}{2^2}$, d'où $P(N \geq 3) \leq \frac{1}{4}$.

f. Pour $n = 4$, il y a $4! = 24$ permutations. Dénombrons-les selon leur nombre de points fixes :

$N = 4$: seule l'identité, soit 1 permutation ; $N = 3$: impossible, car si trois éléments sont fixes, le quatrième l'est aussi ;

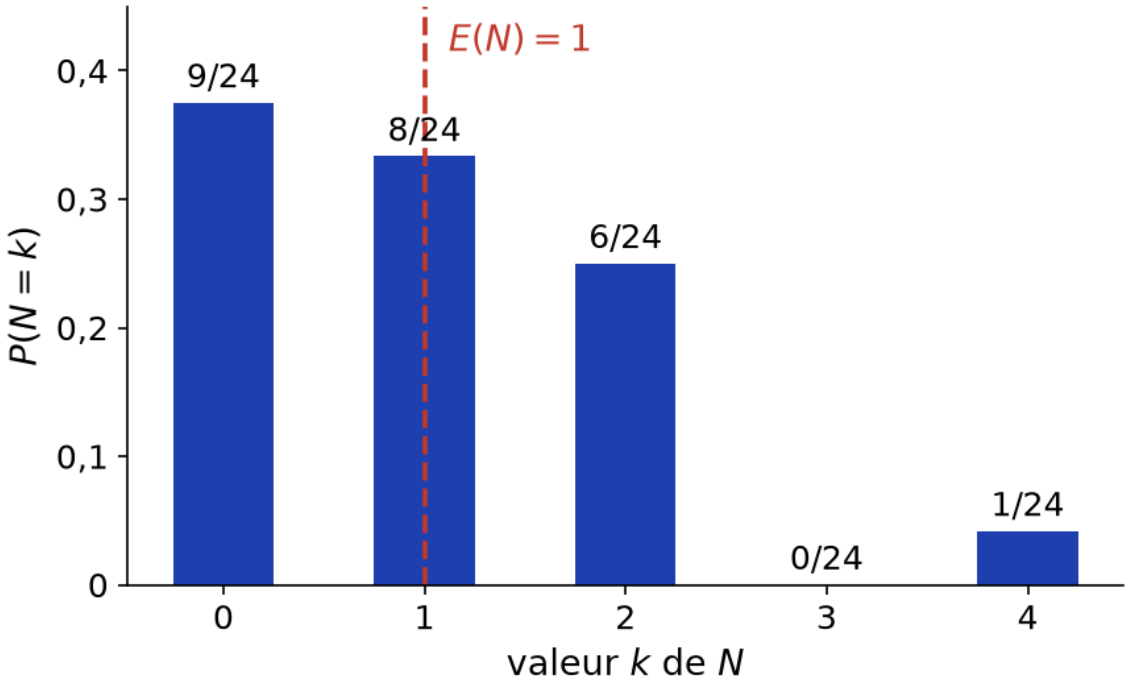
$N = 2$: on choisit les deux points fixes, puis les deux autres sont échangés, soit $\binom{4}{2} = 6$ permutations ;

$N = 1$: on choisit le point fixe (4 choix), puis on permute les trois autres sans point fixe, ce qui laisse les deux 3-cycles, soit $4 \times 2 = 8$ permutations ;

$N = 0$: par complémentaire, $24 - 1 - 6 - 8 = 9$ permutations.

La loi de N est donc : $P(N = 0) = \frac{9}{24}$, $P(N = 1) = \frac{8}{24}$, $P(N = 2) = \frac{6}{24}$, $P(N = 3) = 0$, $P(N = 4) = \frac{1}{24}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



On en déduit $E(N) = \frac{8 + 2 \times 6 + 4 \times 1}{24} = \frac{24}{24} = 1$ et $E(N^2) = \frac{8 + 4 \times 6 + 16 \times 1}{24} = \frac{48}{24} = 2$. Par la formule de König-Huygens, $V(N) = 2 - 1^2 = 1$: on retrouve bien les résultats de b) et d).

Erreur fréquente : écrire $V(N) = \sum V(X_i)$ comme si les X_i étaient indépendantes, ce qui donne $\frac{n-1}{n}$ au lieu de 1.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la bijection, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la probabilité, 0,5 point pour la covariance, 0,5 point pour la non-indépendance ; d) 1,5 point : 0,5 point pour la formule de la variance d'une somme, 0,5 point pour le nombre de couples, 0,5 point pour le calcul ; e) 0,5 point ; f) 1 point : 0,5 point pour la loi, 0,5 point pour la vérification.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : probabilités finies, espérance et variance

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Probabilités sur un univers fini » en maths sup et « Espérance et variance » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** probabilités sur un univers fini, espérance et variance.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.