

Corrigé du contrôle de maths sup : probabilités finies, espérance et variance

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours	3 points
Exercice 2 : Un test de dépistage	3 points
Exercice 3 : Couple de variables et indépendance	4 points
Exercice 4 : Estimer une proportion	4 points
Exercice 5 : Points fixes d'une permutation aléatoire	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

- a. **Formule des probabilités totales.** Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B , $P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k) P_{A_k}(B)$.

Démonstration : les A_k sont deux à deux incompatibles et leur réunion est Ω . Donc B est la réunion des événements deux à deux incompatibles $B \cap A_k$. Par additivité,

$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k)$. Comme $P(A_k) > 0$, la définition de la probabilité conditionnelle donne $P(B \cap A_k) = P(A_k) P_{A_k}(B)$, d'où la formule.

Formule de Bayes. Si de plus $P(B) > 0$, alors pour tout k ,

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k) P_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B)}.$$

En effet, $P_B(A_k) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$. Il suffit alors d'écrire le numérateur $P(A_k) P_{A_k}(B)$ et de remplacer le dénominateur par la formule des probabilités totales.

b. **Inégalité de Markov.** Si X est une variable aléatoire réelle positive et $a > 0$, alors

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Démonstration : notons $1_{\{X \geq a\}}$ l'indicatrice de l'événement $\{X \geq a\}$. Comme $X \geq 0$, on a en tout point $X \geq a 1_{\{X \geq a\}}$. Par croissance et linéarité de l'espérance, $E(X) \geq a E(1_{\{X \geq a\}}) = a P(X \geq a)$, ce qui donne l'inégalité.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour toute variable aléatoire réelle X et tout $\varepsilon > 0$,

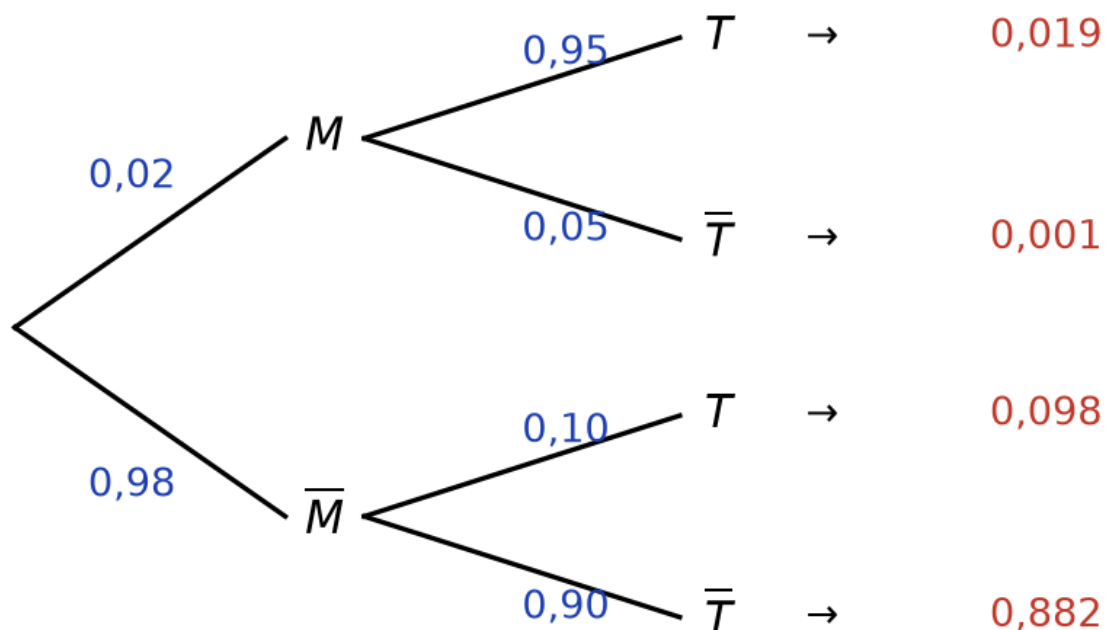
$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$. En effet, les événements $\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\}$ et $\{(X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2\}$ sont égaux. On applique donc Markov à la variable positive $(X - E(X))^2$, dont l'espérance est $V(X)$, avec $a = \varepsilon^2$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour chaque énoncé, 0,5 point pour les démonstrations ; b) 1,5 point : 0,5 point pour l'énoncé de Markov, 0,5 point pour sa preuve par l'indicatrice, 0,5 point pour Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 2 : Un test de dépistage (3 points)

L'énoncé donne $P(M) = 0,02$, $P_M(T) = 0,95$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,90$, donc

$P_{\overline{M}}(T) = 0,10$. L'arbre ci-dessous résume la situation, avec la probabilité de chaque chemin.



- a. Le couple $(M, \bar{M})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M) P_M(T) + P(\bar{M}) P_{\bar{M}}(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,10 = 0,019 + 0,098.$$

Ainsi, $P(T) = 0,117$.

- b. D'après la formule de Bayes,

$$P_T(M) = \frac{P(M) P_M(T)}{P(T)} = \frac{0,019}{0,117} = \frac{19}{117}.$$

Or $117 \times 0,16 = 18,72$ et $117 \times 0,17 = 19,89$, donc $P_T(M) = \frac{19}{117} \approx 0,16$. Autrement dit, une personne positive a seulement environ une chance sur six d'être malade. En effet, la maladie est rare : les faux positifs, issus des 98 % de personnes saines, sont bien plus nombreux que les vrais positifs.

- c. Par indépendance conditionnelle, $P_M(T_1 \cap T_2) = 0,95^2 = 0,9025$ et $P_{\bar{M}}(T_1 \cap T_2) = 0,10^2 = 0,01$. Par la formule de Bayes :

$$P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{0,02 \times 0,9025}{0,02 \times 0,9025 + 0,98 \times 0,01} = \frac{0,01805}{0,02785} = \frac{1805}{2785} = \frac{361}{557}.$$

Comme $557 \times 0,65 = 362,05$, on obtient $P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{361}{557} \approx 0,65$. Le second test positif fait donc passer la probabilité d'être malade d'environ 16 % à environ 65 %.

Erreur fréquente : confondre $P_T(M)$ avec $P_M(T) = 0,95$, c'est-à-dire la probabilité recherchée avec la sensibilité du test.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la formule des probabilités totales citée, 0,5 point pour 0,117 ; b) 1 point : 0,5 point pour Bayes, 0,25 point pour la valeur approchée, 0,25 point pour le commentaire ; c) 1 point : 0,5 point pour l'indépendance conditionnelle, 0,5 point pour 361/557 et sa valeur approchée.

Exercice 3 : Couple de variables et indépendance (4 points)

- a. Par indépendance des dés, chacun des 16 couples (D_1, D_2) a pour probabilité $\frac{1}{16}$. Soit $i, j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$. Si $i > j$, l'événement $\{X = i, Y = j\}$ est impossible, car le minimum ne dépasse pas le maximum. Si $i = j$, il correspond au seul couple (i, i) . Enfin, si $i < j$, il correspond aux deux couples (i, j) et (j, i) . On obtient le tableau suivant, où la case de la ligne i et de la colonne j contient $P(X = i, Y = j)$:

$X \setminus Y$	1	2	3	4	loi de X
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
loi de Y	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

La somme des seize cases vaut bien $\frac{4 \times 1 + 6 \times 2}{16} = 1$.

- b. Les lois marginales s'obtiennent en sommant les lignes et les colonnes : $P(X = i) = \frac{9 - 2i}{16}$ et $P(Y = j) = \frac{2j - 1}{16}$ pour $i, j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$. Par conséquent,

$$E(X) = \frac{1 \times 7 + 2 \times 5 + 3 \times 3 + 4 \times 1}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8},$$

$$E(Y) = \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}.$$

Donc $E(X) + E(Y) = \frac{40}{8} = 5$. C'est cohérent : $X + Y = D_1 + D_2$, donc par linéarité $E(X) + E(Y) = E(D_1) + E(D_2) = 2 \times \frac{5}{2} = 5$.

c. On a $P(X = 4, Y = 1) = 0$ alors que $P(X = 4)P(Y = 1) = \frac{1}{256} \neq 0$. **Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.**

d. Deux des quatre faces sont paires, donc $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. La somme est paire lorsque les deux dés ont la même parité, donc $P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Ensuite, $A \cap B$ signifie « deux résultats pairs », de probabilité $\frac{1}{4}$ par indépendance des dés. De même, $A \cap C = A \cap B$ (si D_1 est pair et la somme paire, alors D_2 est pair) et $B \cap C = A \cap B$. Ainsi $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$: les événements sont **deux à deux indépendants**. En revanche, $A \cap B \cap C = A \cap B$, donc $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$: ils **ne sont pas mutuellement indépendants**.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la justification des trois cas, 1 point pour le tableau ; b) 1 point : 0,5 point pour les lois marginales, 0,5 point pour les espérances ; c) 0,5 point pour un contre-exemple ; d) 1 point : 0,5 point pour l'indépendance deux à deux, 0,5 point pour le défaut d'indépendance mutuelle.

Exercice 4 : Estimer une proportion (4 points)

a. Notons B_k l'indicatrice de « pile au k -ième lancer ». Les B_k sont des variables de Bernoulli de paramètre p , mutuellement indépendantes, et $S_n = B_1 + \dots + B_n$. Donc S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Il vient $E(S_n) = np$ et $V(S_n) = np(1-p)$. Par linéarité et d'après $V(aX) = a^2 V(X)$: $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

b. Pour tout réel p , $\frac{1}{4} - p(1-p) = p^2 - p + \frac{1}{4} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à F_n , d'espérance p , donne alors

$$P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(F_n)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

c. Avec $\varepsilon = 0,05$, on a $4n\varepsilon^2 = 4n \times 0,0025 = 0,01 n$. Il suffit donc que $\frac{1}{0,01 n} \leq 0,05$, c'est-à-dire $\frac{100}{n} \leq 0,05$, soit $n \geq 2000$. Ainsi, $n = 2000$ **lancers suffisent**, quelle que soit la valeur de p .

d. La fréquence observée vaut $\frac{1100}{2000} = 0,55$. D'après c), l'événement $|F_n - p| < 0,05$ a une probabilité au moins égale à $0,95$. On peut donc affirmer, avec un risque d'erreur au plus de 5% , que $p \in]0,50 ; 0,60[$. Cet intervalle ne contient pas $\frac{1}{2}$: la pièce paraît déséquilibrée en faveur de pile.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la loi binomiale justifiée, 1 point pour $E(F_n)$ et $V(F_n)$; b) 1 point : 0,5 point pour la majoration de $p(1-p)$, 0,5 point pour Bienaymé-Tchebychev ; c) 1 point : 0,5 point pour l'inéquation, 0,5 point pour 2 000 ; d) 0,5 point pour l'intervalle et la conclusion.

Exercice 5 : Points fixes d'une permutation aléatoire (6 points)

a. Une permutation qui fixe i est déterminée par sa restriction à $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$, qui est une permutation de cet ensemble à $n - 1$ éléments. Réciproquement, toute permutation de cet ensemble se prolonge de façon unique en posant $\sigma(i) = i$. Il y a donc $(n-1)!$ permutations qui fixent i . Comme la loi est uniforme sur S_n , qui a $n!$ éléments,

$$P(\sigma(i) = i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

b. On a $N = X_1 + \dots + X_n$. Par linéarité de l'espérance,

$$E(N) = \sum_{i=1}^n P(\sigma(i) = i) = n \times \frac{1}{n}, \text{ d'où } E(N) = 1, \text{ indépendamment de } n.$$

c. De même, les permutations qui fixent i et j sont en bijection avec les permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}$. Elles sont donc au nombre de $(n-2)!$, et

$$P(\sigma(i) = i \text{ et } \sigma(j) = j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Comme $X_i X_j$ est l'indicatrice de cet événement,

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n - (n-1)}{n^2(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

Ainsi, $\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n^2(n-1)}$. Cette covariance est non nulle, donc X_i et X_j ne

sont pas indépendantes.

- d. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$, donc $V(X_i) = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n^2}$. La variance d'une somme s'écrit

$$V(N) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) avec $i < j$. Par conséquent,

$$V(N) = n \times \frac{n-1}{n^2} + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1.$$

On a donc $V(N) = 1$ pour tout $n \geq 2$.

- e. Comme N est à valeurs entières, l'événement $\{N \geq 3\}$ est inclus dans $\{|N - 1| \geq 2\}$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(N \geq 3) \leq P(|N - E(N)| \geq 2) \leq \frac{V(N)}{2^2}$,
d'où $P(N \geq 3) \leq \frac{1}{4}$.

- f. Pour $n = 4$, il y a $4! = 24$ permutations. Dénombrons-les selon leur nombre de points fixes :

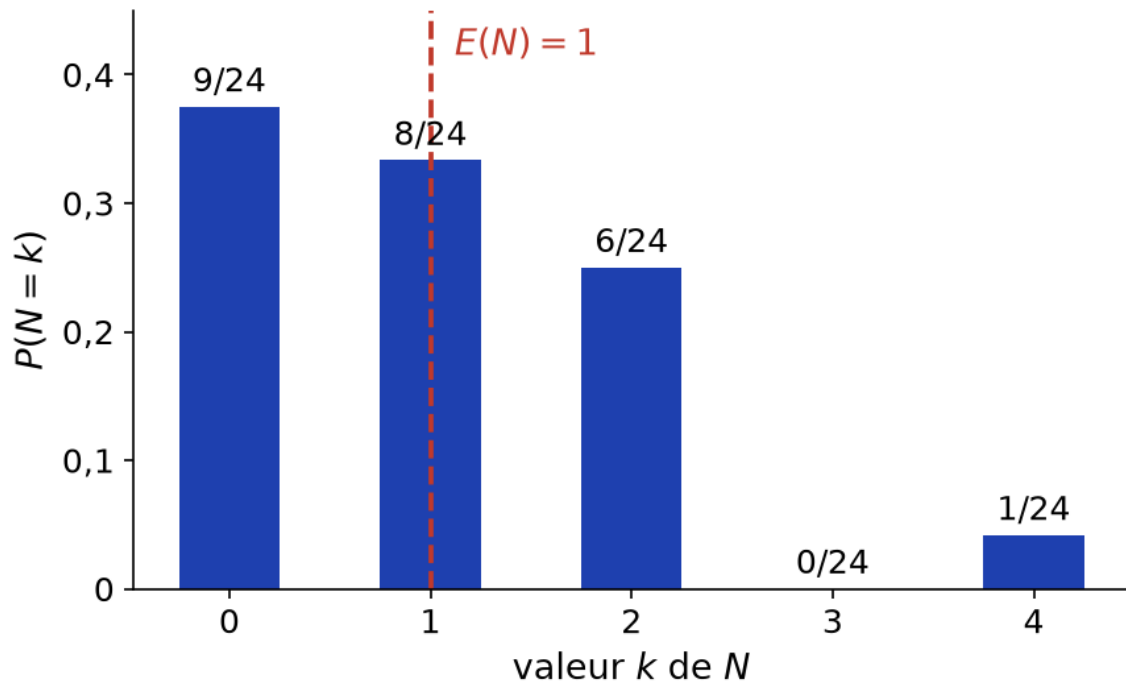
$N = 4$: seule l'identité, soit 1 permutation ; $N = 3$: impossible, car si trois éléments sont fixes, le quatrième l'est aussi ;

$N = 2$: on choisit les deux points fixes, puis les deux autres sont échangés, soit $\binom{4}{2} = 6$ permutations ;

$N = 1$: on choisit le point fixe (4 choix), puis on permute les trois autres sans point fixe, ce qui laisse les deux 3-cycles, soit $4 \times 2 = 8$ permutations ;

$N = 0$: par complémentaire, $24 - 1 - 6 - 8 = 9$ permutations.

La loi de N est donc : $P(N = 0) = \frac{9}{24}$, $P(N = 1) = \frac{8}{24}$, $P(N = 2) = \frac{6}{24}$,
 $P(N = 3) = 0$, $P(N = 4) = \frac{1}{24}$.



On en déduit $E(N) = \frac{8 + 2 \times 6 + 4 \times 1}{24} = \frac{24}{24} = 1$ et
 $E(N^2) = \frac{8 + 4 \times 6 + 16 \times 1}{24} = \frac{48}{24} = 2$. Par la formule de König-Huygens,
 $V(N) = 2 - 1^2 = 1$: on retrouve bien les résultats de b) et d).

Erreur fréquente : écrire $V(N) = \sum V(X_i)$ comme si les X_i étaient indépendantes, ce qui donne $\frac{n-1}{n}$ au lieu de 1.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la bijection, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la probabilité, 0,5 point pour la covariance, 0,5 point pour la non-indépendance ; d) 1,5 point : 0,5 point pour la formule de la variance d'une somme, 0,5 point pour le nombre de couples, 0,5 point pour le calcul ; e) 0,5 point ; f) 1 point : 0,5 point pour la loi, 0,5 point pour la vérification.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : probabilités finies, espérance et variance

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Probabilités sur un univers fini](#) » en maths sup et « [Espérance et variance](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [probabilités sur un univers fini](#), [espérance et variance](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).