

Corrigé du contrôle de maths sup : polynômes, racines et fractions rationnelles

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours	2,5 points
Exercice 2 : Restes de divisions et racine multiple	3,5 points
Exercice 3 : Relations entre coefficients et racines	2,5 points
Exercice 4 : Interpolation de Lagrange	2 points
Exercice 5 : Factorisation et éléments simples	4,5 points
Exercice 6 : Problème : polynômes de Tchebychev	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Questions de cours (2,5 points)

a. Formule de Taylor : si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré d et $a \in \mathbb{K}$, alors

$$P = \sum_{k=0}^d \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

Supposons $P(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$. Les termes d'indice $k \leq m-1$ disparaissent,

donc $P = (X - a)^m \sum_{k \geq m} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^{k-m}$: a est racine d'ordre au moins m .
Réciproquement, supposons $P = (X - a)^m Q$. Pour $j \leq m - 1$, la formule de Leibniz donne $P^{(j)} = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} [(X - a)^m]^{(i)} Q^{(j-i)}$. Chaque dérivée $[(X - a)^m]^{(i)}$ avec $i \leq j < m$ est un multiple de $(X - a)^{m-i}$, qui s'annule en a . **Donc** $P^{(j)}(a) = 0$ pour tout $j \leq m - 1$, ce qui prouve l'équivalence.

- b. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P est scindé sur $\mathbb{C}$. Comme il est unitaire,
 $P = (X - a)(X - b)(X - c)$. En développant,
 $P = X^3 - (a + b + c) X^2 + (ab + bc + ca) X - abc$. Par identification des coefficients :
 $a + b + c = -p$, $ab + bc + ca = q$ et $abc = -r$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la formule de Taylor, 0,5 par sens de l'équivalence ; b) 1 point : 0,5 pour la factorisation justifiée, 0,5 pour les trois relations.

Exercice 2 : Restes de divisions et racine multiple (3,5 points)

- a. Le diviseur est de degré 2, donc le reste est de la forme $R = \alpha X + \beta$ et
 $X^n = (X - 1)(X - 2) Q + \alpha X + \beta$. En évaluant en 1 puis en 2 : $\alpha + \beta = 1$ et $2\alpha + \beta = 2^n$. Par différence, $\alpha = 2^n - 1$, puis $\beta = 2 - 2^n$. **Le reste est**
 $R = (2^n - 1) X + 2 - 2^n$.
- b. On écrit $X^n = (X - 1)^2 Q + \alpha X + \beta$. En évaluant en 1 : $\alpha + \beta = 1$. En dérivant,
 $n X^{n-1} = 2(X - 1) Q + (X - 1)^2 Q' + \alpha$, puis en évaluant en 1 : $\alpha = n$. Ainsi
 $\beta = 1 - n$. **Le reste est** $R = nX + 1 - n$.
- c. $P(1) = 1 - n + n - 1 = 0$, donc 1 est racine. On dérive :

$$P' = 2n X^{2n-1} - n(n+1) X^n + n(n-1) X^{n-2},$$

$$P'' = 2n(2n-1) X^{2n-2} - n^2(n+1) X^{n-1} + n(n-1)(n-2) X^{n-3}.$$

D'abord $P'(1) = 2n - n^2 - n + n^2 - n = 0$. Ensuite

$P''(1) = 4n^2 - 2n - n^3 - n^2 + n^3 - 3n^2 + 2n = 0$. Enfin, le dernier terme de P''' étant nul si $n = 3$:

$$P'''(1) = 2n(2n-1)(2n-2) - n^2(n+1)(n-1) + n(n-1)(n-2)(n-3).$$

En factorisant par $n(n-1)$:

$$P'''(1) = n(n-1)[8n - 4 - n^2 - n + n^2 - 5n + 6] = 2n(n-1)(n+1), \text{ qui est non nul.}$$

D'après la caractérisation de l'exercice 1, **1 est racine de multiplicité exactement 3**.

Barème : a) 1 point : 0,5 pour la forme du reste et l'évaluation, 0,5 pour le résultat ; b) 1 point : 0,5 pour la dérivation, 0,5 pour le résultat ; c) 1,5 point : 0,5 pour $P(1) = P'(1) = 0$, 0,5 pour $P''(1) = 0$, 0,5 pour $P'''(1) \neq 0$ et la conclusion.

Exercice 3 : Relations entre coefficients et racines (2,5 points)

Avec les relations de l'exercice 1 ($p = -2$, $q = 3$, $r = -5$) : $\sigma_1 = a + b + c = 2$, $\sigma_2 = ab + bc + ca = 3$ et $\sigma_3 = abc = 5$.

a. $a^2 + b^2 + c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4 - 6$, donc $a^2 + b^2 + c^2 = -2$. Si les trois racines étaient réelles, cette somme de carrés serait positive. **Par conséquent, au moins une racine de P n'est pas réelle.**

b. $P(0) = -5 \neq 0$. Alors $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$, soit $\frac{3}{5}$.

c. Chaque racine x vérifie $x^3 = 2x^2 - 3x + 5$. En sommant ces trois égalités :
 $a^3 + b^3 + c^3 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3(a + b + c) + 15 = -4 - 6 + 15$. **Donc**
 $a^3 + b^3 + c^3 = 5$.

Barème : a) 1 point : 0,5 pour le calcul, 0,5 pour la conclusion sur les racines ; b) 0,5 point ; c) 1 point : 0,5 pour l'usage de $P(x) = 0$, 0,5 pour le résultat.

Exercice 4 : Interpolation de Lagrange (2 points)

a. Avec $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$, on pose $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$:

$$L_0 = \frac{X(X-2)}{3}, \quad L_1 = -\frac{(X+1)(X-2)}{2}, \quad L_2 = \frac{X(X+1)}{6}.$$

Chaque L_i est de degré 2, vaut 1 en x_i et 0 aux deux autres points : $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

b. L'unique polynôme de degré au plus 2 qui convient est $P = 4L_0 + L_1 + L_2$. Le coefficient de X^2 vaut $\frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$, celui de X vaut $-\frac{8}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -2$ et la constante vaut 1.

Donc $P = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. Contrôle : $P(-1) = 4$, $P(0) = 1$ et $P(2) = 1$.

c. Q convient si et seulement si $Q - P$ s'annule en -1 , 0 et 2 . Ces racines étant distinctes, cela équivaut à : $X(X+1)(X-2)$ divise $Q - P$. **Les solutions sont les**
 $Q = (X-1)^2 + X(X+1)(X-2)R$, avec $R \in \mathbb{R}[X]$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point : 0,5 pour la combinaison, 0,5 pour le résultat ; c) 0,5 point.

Exercice 5 : Factorisation et éléments simples (4,5 points)

a. Les racines de $X^6 - 1$ sont les six racines sixièmes de l'unité $e^{ik\pi/3}$, $0 \leq k \leq 5$, toutes simples. **Dans** $\mathbb{C}[X]$, $X^6 - 1 = \prod_{k=0}^5 (X - e^{ik\pi/3})$. Les racines réelles sont 1 et -1 .

On regroupe les racines conjuguées : $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$ donnent

$$X^2 - 2\cos\frac{\pi}{3}X + 1 = X^2 - X + 1; \quad e^{2i\pi/3} \text{ et } e^{-2i\pi/3} \text{ donnent } X^2 + X + 1.$$

Ces deux trinômes ont un discriminant égal à -3 , donc ils sont irréductibles sur $\mathbb{R}$. **Dans**

$$\mathbb{R}[X], \quad X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).$$

b. F a trois pôles simples 0 , -1 , -2 et une partie entière nulle. Le coefficient associé à un pôle s'obtient en multipliant par le facteur correspondant puis en évaluant : $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$ en 0 ,

$$\frac{1}{(-1) \times 1} = -1 \text{ en } -1, \text{ et } \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2} \text{ en } -2.$$

$$F = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}.$$

On regroupe : $F(k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$. Les deux sommes sont télescopiques :

$$S_N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)}.$$

Contrôle pour $N = 1$: $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$. Ainsi $S_N = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)}$ et S_N tend vers $\frac{1}{4}$.

- c. $X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$, avec $X^2 - X + 1$ irréductible sur $\mathbb{R}$. On cherche $G = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$. En évaluant $(X+1)G$ en -1 , $a = \frac{1}{3}$. Ensuite $1 = \frac{1}{3}(X^2 - X + 1) + (bX+c)(X+1)$. Le coefficient de X^2 donne $b = -\frac{1}{3}$, la constante donne $c = \frac{2}{3}$. Ainsi

$$G = \frac{1}{3(X+1)} - \frac{X-2}{3(X^2-X+1)}.$$

On écrit $x-2 = \frac{1}{2}(2x-1) - \frac{3}{2}$ et $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Une primitive sur $] -1, +\infty[$ est donc

$$\Phi(x) = \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

On vérifie que $\Phi'(x) = \frac{1}{x^3+1}$: la dérivée du dernier terme vaut $\frac{1}{2(x^2-x+1)}$.

- d. Les racines de $X^n - 1$ sont les ω_k , toutes simples. La partie entière est nulle, et le coefficient associé au pôle simple ω_k vaut $\frac{1}{P'(\omega_k)}$ avec $P = X^n - 1$. Or $\frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n} = \frac{\omega_k}{n}$.

Donc
$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X-\omega_k}.$$

Erreur fréquente : oublier de vérifier que la partie entière est nulle, c'est-à-dire que le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur.

Barème : a) 1 point : 0,5 par corps ; b) 1,5 point : 0,5 pour la décomposition, 0,5 pour le télescope, 0,5 pour la limite ; c) 1 point : 0,5 pour la décomposition, 0,5 pour la primitive ; d) 1 point : 0,5 pour la formule $1/P'(\omega_k)$, 0,5 pour la simplification.

Exercice 6 : Problème : polynômes de Tchebychev (5 points)

- a. $T_2 = 2X \cdot X - 1$, $T_3 = 2X(2X^2 - 1) - X$ et $T_4 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1)$. **Donc** $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

- b. On raisonne par récurrence double. La propriété sur le degré est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons-la vraie aux rangs n et $n + 1$, avec $n \geq 1$. Alors $2X T_{n+1}$ est de degré $n + 2$ et de coefficient dominant $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Or T_n est de degré $n < n + 2$, donc il ne modifie pas le terme dominant. **T_{n+2} est de degré $n + 2$ et de coefficient dominant 2^{n+1} .** Pour la parité, T_0 est pair et T_1 impair. Si la relation est vraie aux rangs n et $n + 1$, alors

$$T_{n+2}(-X) = -2X (-1)^{n+1} T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) = (-1)^{n+2} T_{n+2}(X).$$

Ainsi $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ pour tout n .

- c. Récurrence double sur n . C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons le résultat vrai aux rangs n et $n + 1$. La formule $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ donne $\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2 \cos \theta \cos((n+1)\theta)$. Donc

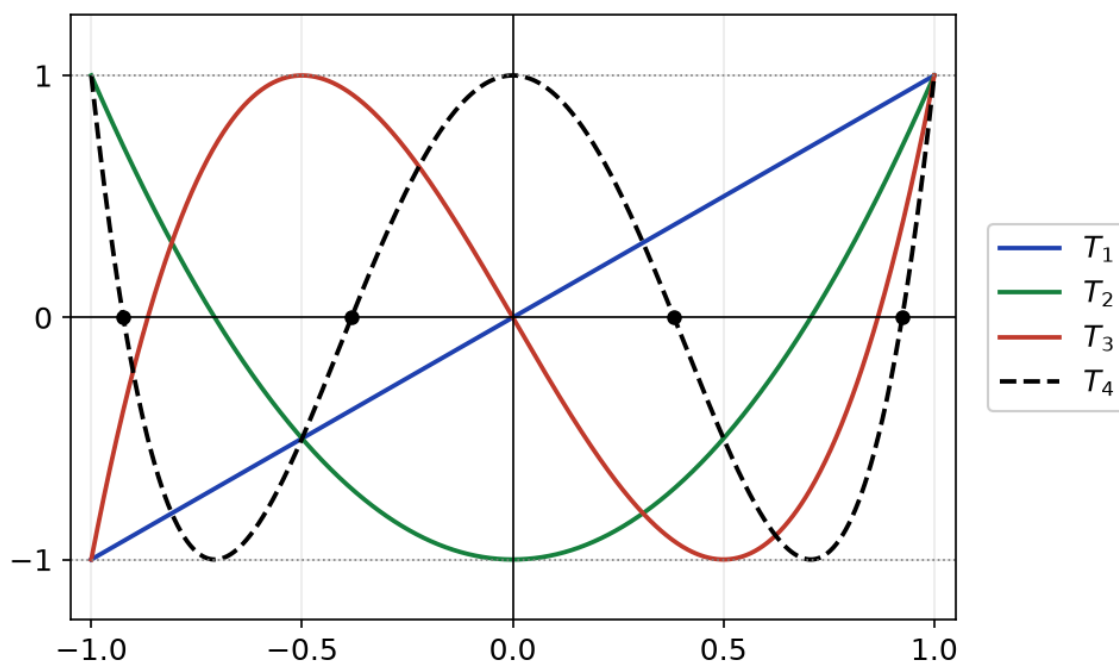
$$T_{n+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_{n+1}(\cos \theta) - T_n(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta).$$

Donc $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ pour tous n et θ .

- d. Posons $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Alors $\cos(n\theta_k) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$, donc $x_k = \cos \theta_k$ est racine de T_n . Les θ_k sont distincts et appartiennent à $]0, \pi[$, où le cosinus est strictement décroissant. Les x_k sont donc n réels distincts de $] -1, 1[$. Un polynôme de degré n a au plus n racines comptées avec multiplicité. **Les x_k sont donc toutes les racines de T_n , elles sont simples, et** $T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)$.

- e. Soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta = \arccos x \in [0, \pi]$. Alors $|T_n(x)| = |\cos(n\theta)| \leq 1$. L'égalité a lieu si et seulement si $n\theta \in \pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\theta = \frac{k\pi}{n}$ avec $0 \leq k \leq n$. **$|T_n(x)| = 1$ exactement aux $n + 1$ points $x = \cos \frac{k\pi}{n}$, $0 \leq k \leq n$.** La figure illustre ces

extremums égaux à ± 1 .



f. Avec $\theta = \frac{\pi}{2}$, c) donne $T_n(0) = \cos(m\pi) = (-1)^m$. La factorisation donne aussi

$$T_n(0) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (-x_k) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} x_k, \text{ car } n \text{ est pair. Donc}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}. \text{ Contrôle pour } m = 1 : \cos\frac{\pi}{4} \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point : 0,5 pour le degré, 0,5 pour la parité ; c) 1 point : 0,5 pour la formule trigonométrique, 0,5 pour la récurrence ; d) 1 point : 0,5 pour les racines, 0,5 pour la simplicité et la factorisation ; e) 1 point : 0,5 pour la majoration, 0,5 pour les points d'égalité ; f) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : polynômes, racines et fractions

rationnelles

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Polynômes](#) » en maths sup et « [Fractions rationnelles](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [polynômes](#), [fractions rationnelles](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).