

Corrigé du contrôle de maths sup : permutations et déterminants

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours sur le déterminant d'un produit	3,5 points
Exercice 2 : Décomposition d'une permutation de S_9	4 points
Exercice 3 : Déterminants par opérations élémentaires	4 points
Exercice 4 : Un déterminant tridiagonal	4 points
Exercice 5 : Vandermonde, interpolation et comatrice	4,5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours sur le déterminant d'un produit (3,5 points)

- a. φ_u est la composée de $\det_{\mathcal{B}}$, qui est n -linéaire, avec l'application linéaire u appliquée à chaque variable : elle est donc linéaire par rapport à chaque variable. Si $x_i = x_j$ avec $i \neq j$, alors $u(x_i) = u(x_j)$ et $\det_{\mathcal{B}}$ s'annule, car elle est alternée. φ_u est n -linéaire alternée. D'après le résultat admis, il existe un unique scalaire $\det u$ tel que $\varphi_u = \det(u) \det_{\mathcal{B}}$. En évaluant en $\mathcal{B}$, comme $\det(\mathcal{B}) = 1$:
- $$\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$
- b. Par définition, puis en appliquant a) à u avec $x_i = u(e_i)$:

$$\det(u \circ v) = \det_B(u(v(e_1)), \dots, u(v(e_n))) = \varphi_u(v(e_1), \dots, v(e_n)) = \det(u) \det_B(v(e_1), \dots, v(e_n)).$$

Le dernier facteur vaut $\det v$. **Donc** $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$. Pour

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soient u, v les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés :

AB est la matrice de $u \circ v$ et le déterminant d'une matrice est celui de l'endomorphisme associé. **Donc** $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

- c. Si A est inversible, $AA^{-1} = I_n$, donc $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Ce produit n'étant pas nul, $\det A \neq 0$ **et** $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Barème : a) 1 point (0,5 pour le caractère alterné, 0,5 pour l'expression de $\det u$) ; b) 1,5 point (1 pour les endomorphismes, 0,5 pour le passage aux matrices) ; c) 1 point.

Exercice 2 : Décomposition d'une permutation de S_9 (4 points)

- a. On suit les orbites : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, puis $3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 3$, puis $5 \rightarrow 8 \rightarrow 5$. Tous les éléments de $\{1, \dots, 9\}$ apparaissent. $\sigma = (1 \ 4 \ 7 \ 2)(3 \ 6 \ 9)(5 \ 8)$, et ces cycles commutent car leurs supports sont disjoints.

- b. Un cycle s'écrit $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k) = (a_1 \ a_2)(a_2 \ a_3) \dots (a_{k-1} \ a_k)$ (composition de droite à gauche). Donc

$$\sigma = (1 \ 4)(4 \ 7)(7 \ 2)(3 \ 6)(6 \ 9)(5 \ 8).$$

Il y a 6 transpositions et la signature est un morphisme de groupes qui vaut -1 sur toute transposition : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^6 = 1$.

- c. Les cycles commutent, donc $\sigma^m = (1 \ 4 \ 7 \ 2)^m (3 \ 6 \ 9)^m (5 \ 8)^m$, et ces trois facteurs agissent sur des supports disjoints. Il faut donc que m soit multiple de 4, de 3 et de 2. **Le plus petit tel m est** $\text{ppcm}(4, 3, 2) = 12$.
- d. $2026 = 12 \times 168 + 10$, donc $\sigma^{2026} = \sigma^{10}$. Or $10 = 4 \times 2 + 2$, $10 = 3 \times 3 + 1$ et 10 est pair. Ainsi $\sigma^{10} = (1 \ 4 \ 7 \ 2)^2 (3 \ 6 \ 9)(5 \ 8)^0$. Le carré du 4-cycle envoie $1 \rightarrow 7$, $7 \rightarrow 1$, $4 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 4$. $\sigma^{2026} = (1 \ 7)(2 \ 4)(3 \ 6 \ 9)$.
- e. D'après b), un cycle de longueur k est produit de $k - 1$ transpositions, donc sa signature vaut

$(-1)^{k-1}$. Pour σ : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 (-1)^2 (-1)^1 = (-1)^6 = 1$. On retrouve $\varepsilon(\sigma) = 1$.

Erreur fréquente : dire qu'un cycle de longueur k a pour signature $(-1)^k$; un 2-cycle est une transposition, de signature -1 .

Barème : a) 1 point ; b) 1 point (0,5 pour les transpositions, 0,5 pour la signature) ; c) 0,5 point ; d) 1 point (0,5 pour la réduction modulo 12, 0,5 pour la décomposition) ; e) 0,5 point.

Exercice 3 : Déterminants par opérations élémentaires (4 points)

- a. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ ne change pas le déterminant et donne une première colonne égale à $a + 2$ partout. On factorise $a + 2$, puis on effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\Delta(a) = (a + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux :

$$\Delta(a) = (a + 2)(a - 1)^2.$$

- b. On généralise. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$ donne une première colonne dont tous les coefficients valent $a + (n - 1)b$. Par linéarité par rapport à la première colonne, $\det M = (a + (n - 1)b) \det M'$, où M' a une première colonne de 1 et coïncide avec M ailleurs. Dans M' , la ligne 1 est $(1, b, \dots, b)$ et la ligne $i \geq 2$ est $(1, b, \dots, b, a, b, \dots, b)$, avec a en position i . Les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \geq 2$ ne changent pas le déterminant et remplacent la ligne i par $(0, \dots, 0, a - b, 0, \dots, 0)$, avec $a - b$ en position i . La matrice obtenue est triangulaire supérieure de diagonale $(1, a - b, \dots, a - b)$. **Donc**
 $\det M = (a + (n - 1)b)(a - b)^{n-1}$. Pour $n = 3$ et $b = 1$, on retrouve a).

- c. Avec $a = x$ et $b = 1$, le déterminant vaut $(x + n - 1)(x - 1)^{n-1}$. Les n colonnes forment une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si ce déterminant est non nul. **C'est le cas si et**

seulement si $x \neq 1$ et $x \neq 1 - n$.

Barème : a) 1 point ; b) 2 points (0,5 pour l'opération sur les colonnes, 0,5 pour la factorisation, 0,5 pour les opérations sur les lignes, 0,5 pour la conclusion) ; c) 1 point (0,5 pour le critère, 0,5 pour les valeurs).

Exercice 4 : Un déterminant tridiagonal (4 points)

a. $D_1 = 5$ et $D_2 = 5 \times 5 - 2 \times 2 = 21$.

b. Soit $n \geq 3$. La première ligne est $(5, 2, 0, \dots, 0)$. Le développement selon cette ligne donne $D_n = 5 \Delta_{11} - 2 \Delta_{12}$, où Δ_{1j} est le déterminant obtenu en supprimant la ligne 1 et la colonne j .

Δ_{11} est le déterminant tridiagonal de même forme et de taille $n - 1$: $\Delta_{11} = D_{n-1}$.

Dans Δ_{12} , la première colonne est $(2, 0, \dots, 0)$: c'est la première colonne de la matrice initiale privée de son premier coefficient. En développant selon cette colonne, $\Delta_{12} = 2 D_{n-2}$, le mineur restant étant le tridiagonal de taille $n - 2$.

Donc $D_n = 5 D_{n-1} - 4 D_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

c. C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - 5r + 4 = 0$, de racines 1 et 4. Il existe donc α, β réels tels que $D_n = \alpha + \beta 4^n$ pour tout $n \geq 1$. Les conditions $D_1 = 5$ et $D_2 = 21$ donnent $\alpha + 4\beta = 5$ et $\alpha + 16\beta = 21$, d'où $\beta = \frac{4}{3}$ et $\alpha = -\frac{1}{3}$.
 $D_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$ pour tout $n \geq 1$. Vérification : $D_3 = 5 \times 21 - 4 \times 5 = 85$ et $\frac{4^4 - 1}{3} = \frac{255}{3} = 85$.

d. Pour $n \geq 1$, $4^{n+1} > 1$, donc $D_n > 0$. **La matrice est inversible pour tout n .**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point (0,5 pour le développement, 1 pour l'identification des deux mineurs) ; c) 1,5 point (0,5 pour l'équation caractéristique, 0,5 pour les constantes, 0,5 pour la formule) ; d) 0,5 point.

Exercice 5 : Vandermonde, interpolation et comatrice (4,5 points)

- a. En développant $P(X)$ selon la dernière ligne $(1, X, \dots, X^{n-1})$, on obtient

$$P(X) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \Delta_{nj} X^{j-1}, \text{ où les mineurs } \Delta_{nj} \text{ ne dépendent pas de } X.$$

Donc P est un polynôme de degré au plus $n-1$, et le coefficient de X^{n-1} est $\Delta_{nn} = V(x_1, \dots, x_{n-1})$. Pour $i \leq n-1$, $P(x_i)$ est un déterminant ayant deux lignes égales, donc $P(x_i) = 0$.

Montrons par récurrence sur $n \geq 2$ la formule

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \text{ Pour } n=2, V(x_1, x_2) = x_2 - x_1.$$

Supposons-la vraie au rang $n-1$.

Si les $x_1, \dots, x_{n-1}$ ne sont pas distincts, $V(x_1, \dots, x_n)$ a deux lignes égales et vaut 0, comme le produit.

Sinon, le polynôme $P - V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i)$ est de degré au plus $n-2$ et s'annule en $n-1$ points distincts : il est nul. En évaluant en x_n et avec l'hypothèse de récurrence :

$$V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

La formule est démontrée pour tout $n \geq 2$.

- b. Écrivons $P = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$. Les conditions $P(x_i) = y_i$ forment le système linéaire $VC = Y$, où V est la matrice de Vandermonde, C la colonne des c_k et Y celle des y_i . Les x_i étant distincts, $\det V = \prod_{i < j} (x_j - x_i) \neq 0$ d'après a), donc V est inversible. **Le système a une unique solution $C = V^{-1}Y$, d'où l'existence et l'unicité de P .**

- c. A est la matrice de Vandermonde de $(1, 2, 3)$, donc $\det A = (2-1)(3-1)(3-2) = 2$. Les cofacteurs $C_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ valent :

$$C_{11} = 18 - 12 = 6, \quad C_{12} = -(9 - 4) = -5, \quad C_{13} = 3 - 2 = 1;$$

$$C_{21} = -(9 - 3) = -6, \quad C_{22} = 9 - 1 = 8, \quad C_{23} = -(3 - 1) = -2;$$

$$C_{31} = 4 - 2 = 2, \quad C_{32} = -(4 - 1) = -3, \quad C_{33} = 2 - 1 = 1.$$

Contrôle : le développement selon la première ligne donne $1 \times 6 + 1 \times (-5) + 1 \times 1 = 2$.

Avec $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com}(A)^T$:

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie par exemple que la deuxième ligne de A contre la deuxième colonne donne

$$\frac{1}{2}(-6 + 16 - 8) = 1. \quad A^{-1} \text{ est la matrice ci-dessus.}$$

Barème : a) 2 points (0,5 pour le degré et le coefficient dominant, 0,5 pour les racines, 1 pour la récurrence) ; b) 1 point ; c) 1,5 point (0,5 pour $\det A$, 0,5 pour la comatrice, 0,5 pour l'inverse).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : permutations et déterminants

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Groupe symétrique et déterminants » en maths sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [groupe symétrique et déterminants](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths sup sur ce thème

- [Contrôle de maths sup : problème d'algèbre linéaire type concours](#)