

Corrigé du contrôle de maths sup : logique, ensembles et applications

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours sur les applications	4 points
Exercice 2 : Trois modes de raisonnement	5 points
Exercice 3 : Une récurrence forte	3 points
Exercice 4 : Images directes et réciproques	4 points
Exercice 5 : Relation d'équivalence et relation d'ordre	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours sur les applications (4 points)

- a. L'application f est **injective** si $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. Elle est **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
- b. Supposons $g \circ f$ injective. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. En appliquant g , on obtient $g(f(x)) = g(f(x'))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Par injectivité de $g \circ f$, on a donc $x = x'$. Ainsi, f est **injective**.

c. Supposons $g \circ f$ surjective. Soit $z \in G$. Il existe alors $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$.
Posons $y = f(x)$: c'est un élément de F et $g(y) = z$. Tout élément de G possède donc un antécédent par g . **Ainsi, g est surjective.**

d. On échange les quantificateurs et on nie l'implication $P \Rightarrow Q$ en « P et non Q » :

$$\begin{aligned} & \exists \varepsilon > 0, \\ & , \forall \eta > 0, \\ & , \exists (x, y) \in I^2, \\ & , |x - y| \leq \eta \text{ et } |h(x) - h(y)| > \varepsilon. \end{aligned}$$

C'est la négation cherchée (elle exprime que h n'est pas uniformément continue sur I).

Erreur fréquente : nier l'implication en « $|x - y| > \eta \Rightarrow \dots$ ». La négation d'une implication n'est jamais une implication.

Barème : a) 0,5 point par définition correctement quantifiée ; b) 1 point : 0,5 pour l'introduction de x et x' , 0,5 pour la conclusion justifiée ; c) 1 point : 0,5 pour le choix de $y = f(x)$, 0,5 pour la conclusion ; d) 1 point : 0,5 pour les quantificateurs, 0,5 pour la négation de l'implication.

Exercice 2 : Trois modes de raisonnement (5 points)

a. Raisonnons par contraposition : montrons que si n est impair, alors 8 divise $n^2 - 1$.
Supposons n impair et écrivons $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Alors

$$n^2 - 1 = 4p^2 + 4p = 4p(p+1).$$

Or p et $p + 1$ sont deux entiers consécutifs, donc l'un d'eux est pair et $p(p+1) = 2q$ avec $q \in \mathbb{N}$. Ainsi $n^2 - 1 = 8q$. **La contraposée est vraie, donc si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.**

b. Raisonnons par l'absurde et supposons $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Comme

$\ln 2 > 0$ et $\ln 3 > 0$, le quotient est strictement positif, donc $p \geq 1$. On obtient $q \ln 2 = p \ln 3$, soit $\ln(2^q) = \ln(3^p)$. La fonction $\ln$ est injective, donc $2^q = 3^p$. Or 2^q est pair car $q \geq 1$, tandis que 3^p est impair comme produit de nombres impairs. C'est absurde. **Donc $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.**

c. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons $f = p + i$ avec p paire et i impaire. Pour tout réel x , on a $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(x) - i(x)$. En additionnant puis en soustrayant, on obtient

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Les fonctions p et i sont donc entièrement déterminées par f : cela prouve l'unicité.

Synthèse. Définissons p et i par les formules ci-dessus. Alors

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x), \text{ donc } p \text{ est paire ; de même}$$

$i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x)$, donc i est impaire. Enfin $p(x) + i(x) = f(x)$ pour tout x . **La décomposition existe et elle est unique.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour l'énoncé de la contraposée, 0,5 pour la factorisation $4p(p+1)$, 0,5 pour la parité de $p(p+1)$; b) 1,5 point : 0,5 pour l'hypothèse avec $p \geq 1$, 0,5 pour $2^q = 3^p$, 0,5 pour la contradiction de parité ; c) 2 points : 1 pour l'analyse (unicité), 1 pour la synthèse (parité vérifiée et somme).

Exercice 3 : Une récurrence forte (3 points)

a. On calcule successivement $u_1 = u_0 = 1$, $u_2 = u_0 + u_1 = 2$, $u_3 = 1 + 1 + 2 = 4$ et $u_4 = 1 + 1 + 2 + 4 = 8$. **On conjecture que $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.**

b. Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^{n-1}$ ».

Initialisation : $u_1 = 1 = 2^0$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \geq 1$; supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$. Alors,

par somme géométrique,

$$u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=1}^n u_k = 1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 1 + (2^n - 1) = 2^n.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence forte, $u_n = 2^{n-1}$ **pour tout entier** $n \geq 1$.

La récurrence simple ne suffit pas directement, car u_{n+1} s'exprime à l'aide de *tous* les termes $u_0, \dots, u_n$: l'hypothèse sur le seul terme u_n ne permet pas de calculer la somme.

Barème : a) 1 point : 0,5 pour les quatre valeurs, 0,5 pour la conjecture ; b) 2 points : 0,5 pour l'énoncé de $\mathcal{P}(n)$ et l'initialisation, 1 pour l'hérédité forte correctement formulée et calculée, 0,5 pour la conclusion et l'explication.

Exercice 4 : Images directes et réciproques (4 points)

- a. Sur $[-1,0]$, la fonction f est continue et décroissante, d'image $[0,1]$; sur $[0,2]$, elle est continue et croissante, d'image $[0,4]$. Donc $f([-1,2]) = [0,4]$.

Ensuite, $x^2 \in [1,4] \Leftrightarrow 1 \leq |x| \leq 2$, donc $f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$.

Enfin, un carré n'est jamais strictement négatif, donc $f^{-1}(]-\infty,0[) = \emptyset$.

- b. Soit $y \in \varphi(\varphi^{-1}(B))$: il existe $x \in \varphi^{-1}(B)$ tel que $y = \varphi(x)$. Par définition de l'image réciproque, $\varphi(x) \in B$, donc $y \in B$. **Ainsi** $\varphi(\varphi^{-1}(B)) \subset B$.

Soit $x \in A$. Alors $\varphi(x) \in \varphi(A)$, donc $x \in \varphi^{-1}(\varphi(A))$. **Ainsi** $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(A))$.

Supposons φ injective et soit $x \in \varphi^{-1}(\varphi(A))$. Alors $\varphi(x) \in \varphi(A)$: il existe $a \in A$ tel que $\varphi(x) = \varphi(a)$. Par injectivité, $x = a \in A$. Avec l'inclusion précédente, $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$.

- c. Prenons $A = [-1,0]$ et $A' = [0,1]$. Alors $A \cap A' = \{0\}$, donc $f(A \cap A') = \{0\}$. En revanche, $f(A) = f(A') = [0,1]$, donc $f(A) \cap f(A') = [0,1]$. **Comme** $[0,1] \not\subset \{0\}$

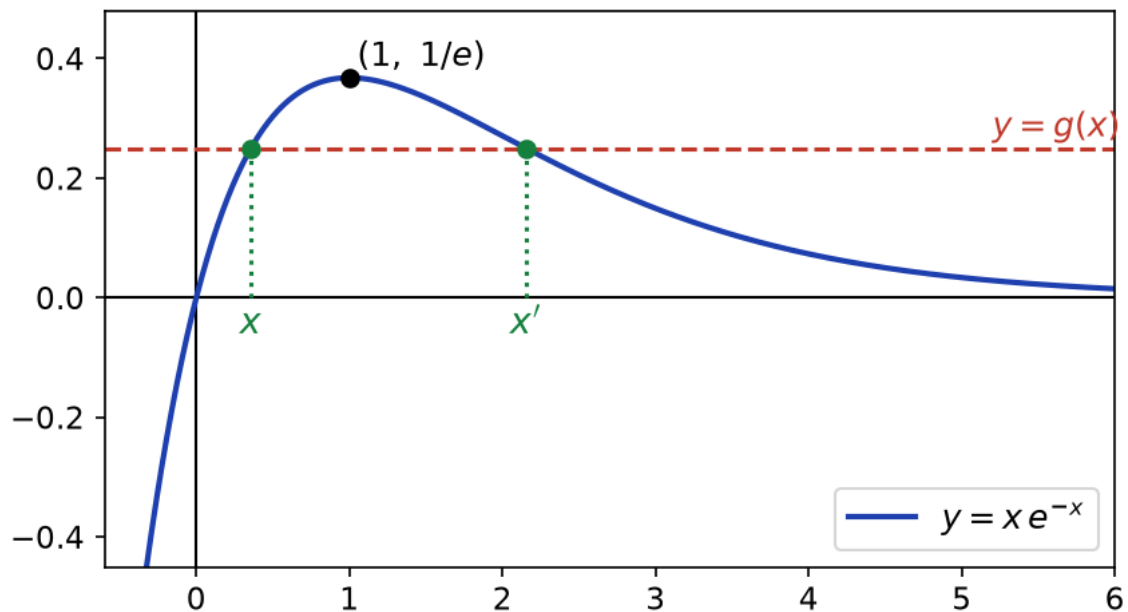
, l'inclusion réciproque est fausse.

Erreur fréquente : écrire $f^{-1}([1,4]) = [1,2]$ en oubliant les antécédents négatifs ; ici f^{-1} désigne une image réciproque, pas une application réciproque.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 par ensemble ; b) 1,5 point : 0,5 par inclusion ou égalité démontrée ; c) 1 point : 0,5 pour le choix de A et A' , 0,5 pour les calculs et la conclusion.

Exercice 5 : Relation d'équivalence et relation d'ordre (4 points)

- a. Pour tout réel x , $g(x) = g(x)$, donc $x \mathcal{R} x$: la relation est réflexive. Si $g(x) = g(y)$, alors $g(y) = g(x)$: elle est symétrique. Enfin, si $g(x) = g(y)$ et $g(y) = g(z)$, alors $g(x) = g(z)$: elle est transitive. **Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.**
- b. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = (1-x)e^{-x}$, du signe de $1-x$. Donc g est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, avec $g(1) = \frac{1}{e}$. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Enfin $g(x)$ a le signe de x .



- Si $x \leq 0$, alors $g(x) \leq 0$. Un réel y équivalent à x vérifie $g(y) \leq 0$, donc $y \leq 0$. Or g est strictement monotone, donc injective, sur $]-\infty, 0]$. Ainsi $y = x$: **la classe de x a un seul élément.**
- Si $x = 1$, le maximum $\frac{1}{e}$ n'est atteint qu'en 1 par stricte monotonie de chaque côté : **la classe de 1 est $\{1\}$.**
- Si $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, posons $c = g(x)$, qui appartient à $]0, \frac{1}{e}[$. La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0, 1]$, donc réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $]0, \frac{1}{e}]$ par le théorème de la bijection. De même, elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, \frac{1}{e}]$. Le réel c a donc exactement un antécédent dans $]0, 1[$ et un dans $]1, +\infty[$, et aucun dans $]-\infty, 0]$. **La classe de x a exactement deux éléments.**

c. Réflexivité : $a = a^1$, donc $a \preceq a$.

Antisymétrie : supposons $b = a^k$ et $a = b^m$ avec $k, m \geq 1$. Alors $a = a^{km}$. Si $a = 1$, alors $b = 1^k = 1 = a$. Si $a \geq 2$, la suite (a^n) est strictement croissante, donc $km = 1$, puis $k = 1$ et $b = a$.

Transitivité : si $b = a^k$ et $c = b^m$, alors $c = a^{km}$ avec $km \geq 1$, donc $a \preceq c$.

La relation $\preceq$ est donc une relation d'ordre. Elle n'est pas totale : 3 n'est pas une puissance de 2 (il est impair et différent de 1) et 2 n'est pas une puissance de 3. **Ainsi 2 et 3 ne sont pas comparables.**

Barème : a) 1 point : les trois propriétés ; b) 1,5 point : 0,5 pour l'étude de $\mathcal{G}$, 1 pour les trois cas justifiés (théorème de la bijection cité) ; c) 1,5 point : 0,25 pour la réflexivité, 0,5 pour l'antisymétrie avec le cas $a = 1$, 0,25 pour la transitivité, 0,5 pour le contre-exemple.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : logique, ensembles et applications

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Logique, ensembles et applications](#) » en [maths sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [logique, ensembles et applications](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).