

Corrigé du contrôle de maths sup : limites, continuité et valeurs intermédiaires

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Théorème de la bijection continue	4 points
Exercice 2 : Caractérisation séquentielle de la limite	4 points
Exercice 3 : Prolongements par continuité	3 points
Exercice 4 : Valeurs intermédiaires et bornes atteintes	4 points
Exercice 5 : Problème – l'équation fonctionnelle de Cauchy	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Théorème de la bijection continue (4 points)

- a. **Théorème de la bijection continue** : si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle, f réalise une bijection de I sur $f(I)$, et sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même sens que f .
- b. $f(I)$ est un intervalle. Soient $y_1 < y_2$ dans $f(I)$ et $y \in [y_1, y_2]$. Il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Le segment d'extrémités x_1 et x_2 est inclus dans l'intervalle I , et f y est continue. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c entre x_1 et x_2 tel que $f(c) = y$. Donc $y \in f(I)$: la partie $f(I)$ est convexe, **c'est un intervalle**.

Bijection. Par définition de $f(I)$, f est surjective de I sur $f(I)$. De plus, si $x \neq x'$, par

exemple $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$ par stricte croissance, donc $f(x) \neq f(x')$. **La fonction f est injective, donc bijective de I sur $f(I)$.**

- c. Soient $y < y'$ dans $f(I)$. Supposons par l'absurde $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$. Comme f est croissante, $f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y'))$, soit $y \geq y'$, ce qui est absurde. **Donc $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$: la réciproque est strictement croissante.**
- d. La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux fonctions continues strictement croissantes. De plus $g(x) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$, car $e^x \rightarrow 0$, et $g(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$. Donc $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, et g **est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$** . Enfin $g(0) = 0 + 1 = 1$, donc $g^{-1}(1) = 0$.

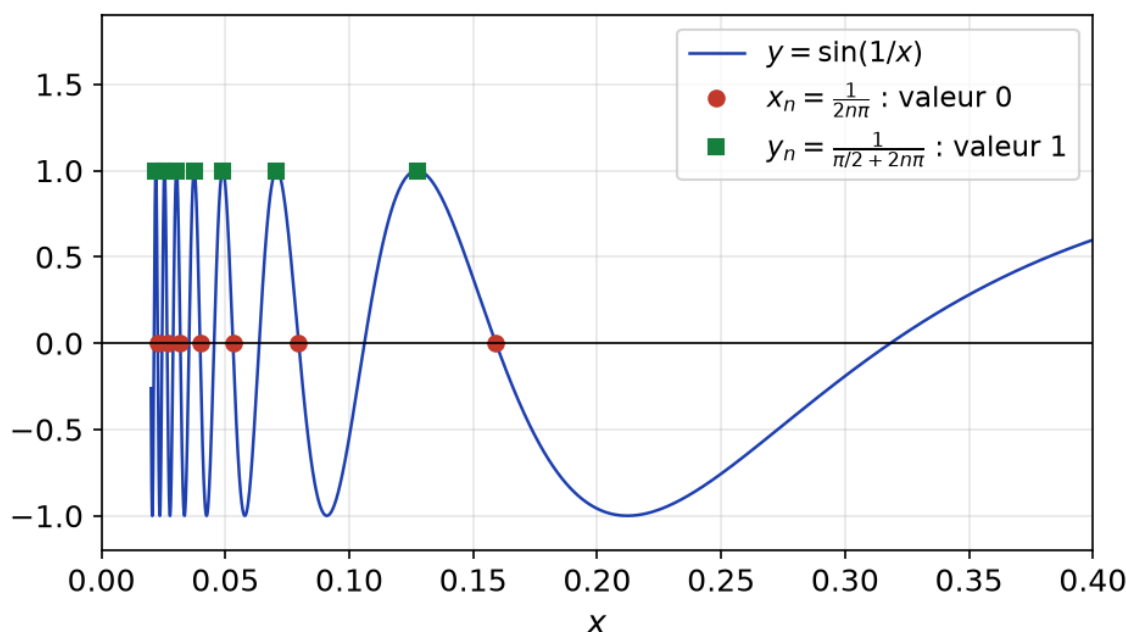
Barème : a) 1 point (hypothèses et conclusions complètes) ; b) 1,5 point : 1 point pour l'intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires, 0,5 point pour l'injectivité ; c) 1 point ; d) 0,5 point.

Exercice 2 : Caractérisation séquentielle de la limite (4 points)

- a. Posons, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Ces deux suites de réels non nuls tendent vers 0. Or :

$$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(2n\pi) = 0 \text{ et } \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

Si la fonction avait une limite L en 0, la caractérisation séquentielle imposerait $L = 0$ et $L = 1$. **Donc $x \rightarrow \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.** La figure montre ces deux suites de points.



b. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, l'intervalle $\left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[$ contient un rationnel x_n et un irrationnel y_n , par densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|y_n - a| < \frac{1}{n}$, donc les deux suites tendent vers a .

Or $1_{\mathbb{Q}}(x_n) = 1$ et $1_{\mathbb{Q}}(y_n) = 0$ pour tout n . Une limite L en a vérifierait donc $L = 1$ et $L = 0$. **La fonction $1_{\mathbb{Q}}$ n'a de limite en aucun point.**

c. Pour $x \neq 0$, $\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$, car le sinus est borné par 1. Comme $|x| \rightarrow 0$, le théorème d'encadrement donne $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point par suite, 0,5 point pour la conclusion par caractérisation séquentielle ; b) 1,5 point : 1 point pour la construction des suites par densité, 0,5 point pour la conclusion ; c) 1 point.

Erreur fréquente : se contenter de dire que le sinus « oscille », ce qui n'est pas une preuve.

Exercice 3 : Prolongements par continuité (3 points)

- a. Pour $x \neq 0$ et $x \geq -1$, multiplions par la quantité conjuguée :

$$f(x) = \frac{(1+x) - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}.$$

Par continuité de la racine en 1, $f(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ quand $x \rightarrow 0$. **On prolonge f par continuité en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.**

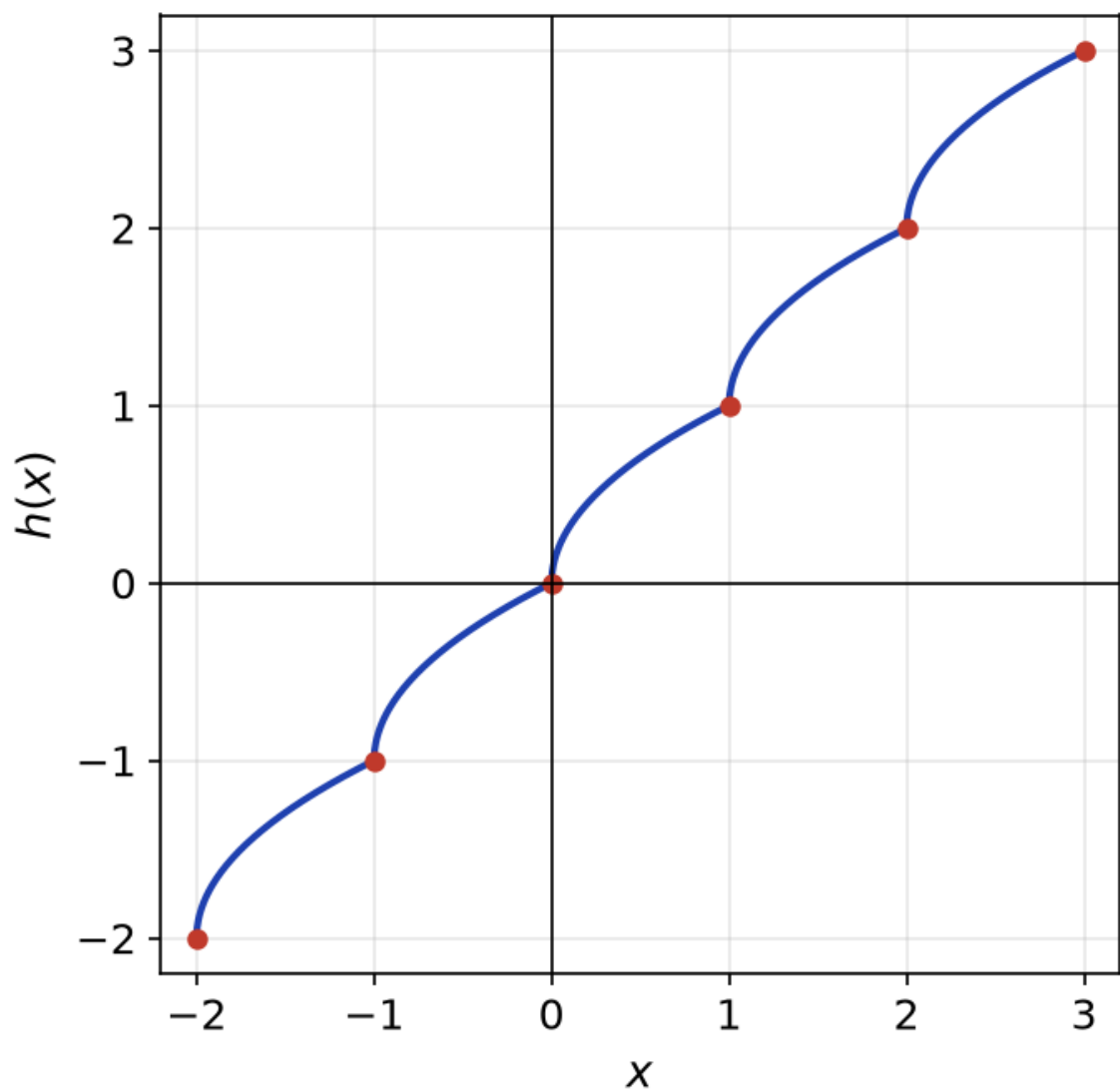
- b. Pour tout réel t , $t-1 < \lfloor t \rfloor \leq t$. Avec $t = \frac{1}{x}$ et $x > 0$, on multiplie par x :

$$1 - x < g(x) \leq 1.$$

Le théorème d'encadrement donne $g(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0^+$. **On prolonge g par continuité en posant $g(0) = 1$.**

- c. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Sur $[n, n+1[$, $h(x) = n + \sqrt{x-n}$, fonction continue. Donc h est continue en tout point non entier, et continue à droite en n , avec $h(n) = n$.

À gauche de n , sur $[n-1, n[$, on a $h(x) = n-1 + \sqrt{x-n+1}$. Cette expression tend vers $n-1 + \sqrt{1} = n = h(n)$ quand $x \rightarrow n^-$. Ainsi h est continue à gauche et à droite en n . **Donc h est continue sur $\mathbb{R}$.**



Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la quantité conjuguée, 0,5 point pour la limite et le prolongement ; b) 1 point : 0,5 point pour l'encadrement, 0,5 point pour la conclusion ; c) 1 point : 0,5 point pour les points non entiers, 0,5 point pour la limite à gauche en un entier.

Exercice 4 : Valeurs intermédiaires et bornes atteintes (4 points)

- a. Posons $\varphi(x) = f(x) - x$, continue sur $[0, 1]$. Comme f est à valeurs dans $[0, 1]$, on a $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\varphi(c) = 0$. **Donc** $f(c) = c$: f **admet un point fixe**.
- b. Posons $\psi(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$, continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Alors $\psi(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$. De plus, comme $f(1) = f(0)$:

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -\psi(0).$$

Ainsi $\psi(0)$ et $\psi\left(\frac{1}{2}\right)$ sont de signes opposés, au sens large. Le théorème des valeurs intermédiaires fournit $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $\psi(c) = 0$. **Donc** $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$.

- c. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$. Par le théorème des bornes atteintes, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \min f$. **Le réel** $m = f(x_0)$ **est strictement positif et minore** f .
- d. Comme f tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$, il existe $A > 0$ tel que $f(x) > f(0)$ pour $|x| > A$. Sur le segment $[-A, A]$, f est continue, donc elle atteint un minimum en un point x_0 . Comme $0 \in [-A, A]$, on a $f(x_0) \leq f(0)$.
- Pour $|x| > A$, on a alors $f(x) > f(0) \geq f(x_0)$. Pour $|x| \leq A$, on a $f(x) \geq f(x_0)$. **Donc** $f(x_0)$ **est le minimum de** f **sur** $\mathbb{R}$.

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la fonction auxiliaire, 0,5 point pour les signes opposés, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point ; d) 1 point : 0,5 point pour le choix de A, 0,5 point pour la comparaison avec $f(0)$.

Exercice 5 : Problème - l'équation fonctionnelle de Cauchy (5 points)

1. Avec $x = y = 0$: $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. Avec $y = -x$:
 $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$, donc $f(-x) = -f(x)$: **f est impaire.**

2. Fixons x . Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f(nx) = nf(x)$. C'est vrai pour
 $n = 0$. Si c'est vrai au rang n , alors $f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = (n+1)f(x)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, l'imparité donne $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$. **Donc $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.**

3. Soit $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. D'après 2 :

$$q f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = f(p) = f(p \cdot 1) = p a.$$

Donc $f(r) = \frac{p}{q}a = ar$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$, il existe une suite (r_n) de rationnels qui converge vers x ,
 par exemple $r_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. Comme f est continue en x , la caractérisation séquentielle
 donne $f(r_n) \rightarrow f(x)$. Or $f(r_n) = ar_n \rightarrow ax$. Par unicité de la limite, $f(x) = ax$.

Réciproquement, toute fonction $x \rightarrow ax$ est continue et vérifie $a(x+y) = ax + ay$. **Les solutions sont exactement les fonctions linéaires $x \rightarrow ax$, avec $a \in \mathbb{R}$.**

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $h \rightarrow 0$, $f(x+h) = f(x) + f(h)$, et $f(h) \rightarrow f(0) = 0$ par
 continuité en 0. Donc $f(x+h) \rightarrow f(x)$. **La fonction f est continue en tout point x .**

6. Soit g une telle fonction. Comme g est à valeurs strictement positives, posons $\varphi = \ln \circ g$,
 continue sur $\mathbb{R}$. Alors $\varphi(x+y) = \ln(g(x)g(y)) = \varphi(x) + \varphi(y)$. D'après 4, il existe
 $a \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = ax$, avec $a = \ln g(1)$. Donc $g(x) = e^{ax}$.

Réciproquement, $e^{a(x+y)} = e^{ax}e^{ay}$. **Les solutions sont les fonctions $x \rightarrow e^{ax}$, avec $a \in \mathbb{R}$.**

Barème : 1) 0,5 point ; 2) 1 point : 0,5 point pour la récurrence, 0,5 point pour les entiers négatifs ; 3) 1 point ; 4) 1 point : 0,5 point pour la suite de rationnels, 0,5 point pour la conclusion avec réciproque ; 5) 0,5 point ; 6) 1 point : 0,5 point pour le passage au logarithme, 0,5 point pour la conclusion.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : limites, continuité et valeurs intermédiaires

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Limites et continuité » en maths sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [limites et continuité](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).