

Corrigé du contrôle de maths sup : intégrale sur un segment et sommes de Riemann

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours sur la positivité de l'intégrale	3,5 points
Exercice 2 : Limites de sommes de Riemann	4 points
Exercice 3 : Une intégrale à bornes variables	3,5 points
Exercice 4 : Intégrales de Wallis	4,5 points
Exercice 5 : Formule de Taylor et approximation de e	4,5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours sur la positivité de l'intégrale (3,5 points)

a. Posons $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ pour $x \in [a, b]$. Comme f est continue, le théorème fondamental de l'analyse assure que F est dérivable, de dérivée f . Or $f \geq 0$, donc F est croissante sur $[a, b]$. De plus $F(a) = 0$ et $F(b) = 0$ par hypothèse. Pour tout $x \in [a, b]$, on a donc $0 = F(a) \leq F(x) \leq F(b) = 0$, si bien que F est nulle sur $[a, b]$. **Par conséquent** $f = F' = 0$ **sur** $[a, b]$.

b. Soit f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = 0$ pour $t < 1$ et $f(1) = 1$. Elle est continue par

morceaux, positive, et son intégrale vaut 0 (elle ne diffère de la fonction nulle qu'en un point).

Pourtant f n'est pas la fonction nulle.

c. Comme $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$, la condition s'écrit, par linéarité :

$$\int_0^1 (f(t)^2 - 2t f(t) + t^2) dt = \int_0^1 (f(t) - t)^2 dt = 0.$$

La fonction $t \rightarrow (f(t) - t)^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$, d'intégrale nulle : d'après a), elle est nulle, donc $f(t) = t$ pour tout t . Réciproquement, pour $f(t) = t$, on obtient $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0$. **La seule solution est $f : t \rightarrow t$.**

Barème : a) 1,5 point (0,5 pour la dérivée de F , 0,5 pour la croissance, 0,5 pour la conclusion) ; b) 0,5 point ; c) 1,5 point (0,5 pour le carré, 0,5 pour l'application de a), 0,5 pour la réciproque).

Exercice 2 : Limites de sommes de Riemann (4 points)

a. Si f est continue sur $[0, 1]$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f(x) dx \text{ et, } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f(x) dx.$$

La seconde somme diffère de la première de $\frac{f(1) - f(0)}{n}$, qui tend vers 0.

b. $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (k/n)^2}$ est une somme de Riemann de $x \rightarrow \frac{1}{1 + x^2}$, continue sur $[0, 1]$.

Donc $S_n \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan 1$. $\lim S_n = \frac{\pi}{4}$. Sur la figure, les rectangles sont sous la courbe car la fonction est décroissante : on a même $S_n \leq \frac{\pi}{4}$ pour tout n .

c. Avec $k = n + j$, $T_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+j/n}$, somme de Riemann de $x \rightarrow \frac{1}{1+x}$, continue sur $[0, 1]$. $\lim T_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$.

d. $U_n > 0$ et $\ln U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$, somme de Riemann de $x \rightarrow \ln(1+x)$, continue sur $[0, 1]$. Une primitive de $\ln(1+x)$ est $(1+x)\ln(1+x) - (1+x)$, donc

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = (2 \ln 2 - 2) - (0 - 1) = 2 \ln 2 - 1.$$

Par continuité de l'exponentielle, $U_n \rightarrow e^{2 \ln 2 - 1}$. $\lim U_n = \frac{4}{e}$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point (0,5 pour la mise sous forme de somme de Riemann, 0,5 pour la limite) ; c) 1 point (0,5 pour le changement d'indice, 0,5 pour la limite) ; d) 1,5 point (0,5 pour le logarithme, 0,5 pour l'intégrale, 0,5 pour la conclusion).

Exercice 3 : Une intégrale à bornes variables (3,5 points)

a. La fonction $t \rightarrow e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur tout segment : $G(x)$ existe pour tout réel x . Le changement de variable $t = -s$ donne

$$G(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2} dt = - \int_x^{2x} e^{-s^2} ds = -G(x). \quad G \text{ est impaire.}$$

b. Soit F la primitive de $t \rightarrow e^{-t^2}$ nulle en 0, qui existe et est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. Alors $G(x) = F(2x) - F(x)$, dérivable comme composée et différence de fonctions dérivables, et

$$G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.$$

$$G'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(2e^{-3x^2} - 1).$$

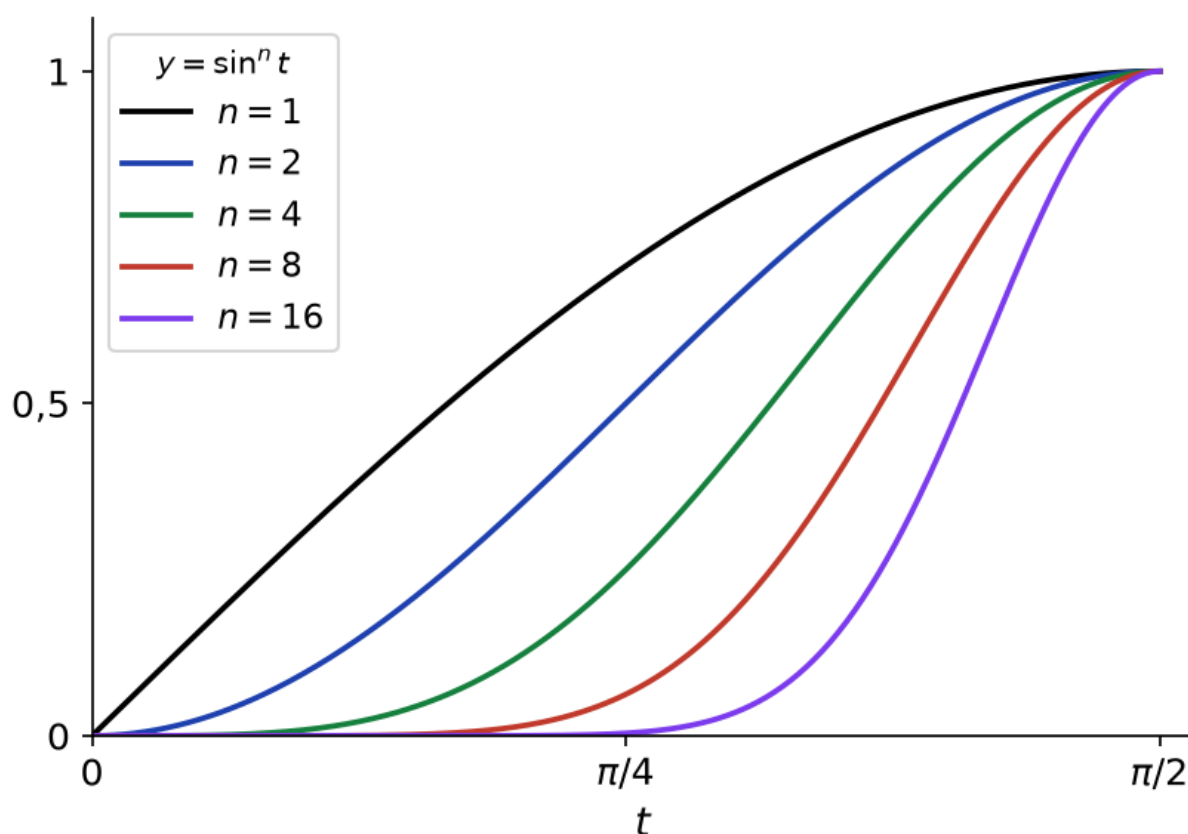
- c. Comme $e^{-x^2} > 0$, $G'(x)$ a le signe de $2e^{-3x^2} - 1$. Or $2e^{-3x^2} \geq 1$ équivaut à $-3x^2 \geq -\ln 2$, soit $x^2 \leq \frac{\ln 2}{3}$. Posons $x_0 = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$. Sur $[0, +\infty[$: G **est croissante sur $[0, x_0]$ et décroissante sur $[x_0, +\infty[$** , avec $G(0) = 0$, un maximum $G(x_0) > 0$ en x_0 , et une limite nulle en $+\infty$ (question d).
- d. Soit $x \geq 0$. Pour $t \in [x, 2x]$, on a $t \geq x \geq 0$, donc $t^2 \geq x^2$ et $0 < e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$. Par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant), $0 \leq G(x) \leq (2x - x) e^{-x^2}$. **Donc** $0 \leq G(x) \leq x e^{-x^2}$. Par croissances comparées, $x e^{-x^2} \rightarrow 0$ en $+\infty$; le théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.

Erreur fréquente : oublier le facteur 2 venant de la dérivée de $x \rightarrow 2x$ dans G' .

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point (0,5 pour la justification par une primitive, 0,5 pour le calcul) ; c) 1 point (0,5 pour le signe, 0,5 pour le tableau) ; d) 1 point (0,5 pour l'encadrement, 0,5 pour la limite).

Exercice 4 : Intégrales de Wallis (4,5 points)

- a. $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$.
- b. La fonction $t \rightarrow \sin^n t$ est continue, positive sur $[0, \pi/2]$ et non identiquement nulle (elle vaut 1 en $\pi/2$). D'après l'exercice 1 a), son intégrale n'est pas nulle : $W_n > 0$. De plus, pour $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin t \leq 1$, donc $\sin^{n+1} t \leq \sin^n t$. Par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} \leq W_n$: **la suite est décroissante.**



La figure illustre la décroissance : les courbes $y = \sin^n t$ descendent quand n augmente, et l'aire sous chacune d'elles est W_n .

- c. On écrit $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \cdot \sin t \, dt$ et on intègre par parties avec $u(t) = \sin^{n+1} t$ et $v(t) = -\cos t$, de classe $\mathcal{C}^1$:

$$W_{n+2} = [-\cos t \sin^{n+1} t]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^2 t \, dt.$$

Le crochet est nul. En écrivant $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, on obtient

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2}), \text{ soit } (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n. \text{ Donc } W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

- d. Posons $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. D'après c),

$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = u_n. \text{ La suite est constante, égale à } u_0 = W_1W_0. \text{ Pour tout } n, (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

- e. Par décroissance et positivité, $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$. En divisant par $W_n > 0$ et avec c) :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Par encadrement, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \rightarrow 1$: $W_{n+1} \sim W_n$. Alors, d'après d),

$\frac{\pi}{2} = (n+1) W_{n+1} W_n \sim n W_n^2$, donc $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$. Comme $W_n > 0$, on peut prendre la racine carrée d'un équivalent : $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point (0,5 pour la stricte positivité, 0,5 pour la décroissance) ; c) 1 point (0,5 pour l'intégration par parties, 0,5 pour la relation) ; d) 0,5 point ; e) 1,5 point (0,75 pour $W_{n+1} \sim W_n$, 0,75 pour l'équivalent final).

Exercice 5 : Formule de Taylor et approximation de e (4,5 points)

- a. Raisonnons par récurrence sur n . Pour $n = 0$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et le théorème fondamental de l'analyse donne $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$: c'est la formule.

Supposons la formule vraie au rang n et soit f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$. Intégrons par parties le reste avec $u = f^{(n+1)}$ et $v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt.$$

Le crochet vaut $\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$: c'est le terme d'indice $n+1$ de la somme. **La formule est donc vraie au rang $n+1$, puis pour tout n .**

- b. Par l'inégalité triangulaire intégrale (bornes dans l'ordre croissant) et puisque $b-t \geq 0$:

$$\left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt = M \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^b = \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

C'est l'inégalité de Taylor-Lagrange.

c. Pour $f = \exp$ sur $[0, 1]$: $f^{(k)}(0) = 1$ et $|f^{(n+1)}(t)| = e^t \leq e < 3$. On prend $M = 3$, $a = 0$, $b = 1$: $\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!}$. Comme $\frac{3}{(n+1)!} \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \rightarrow e$.

d. On veut $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$, soit $(n+1)! > 3000$. Or $6! = 720 < 3000$ et $7! = 5040 > 3000$. **Le plus petit entier est $n = 6$.** Alors, en réduisant au dénominateur 720 :

$$\sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} = \frac{720 + 720 + 360 + 120 + 30 + 6 + 1}{720} = \frac{1957}{720}.$$

Donc $e \approx \frac{1957}{720}$ à moins de 10^{-3} près (on a $\frac{1957}{720} \approx 2,7181$).

Barème : a) 1,5 point (0,5 pour l'initialisation, 1 pour l'intégration par parties) ; b) 1 point ; c) 1 point (0,5 pour la majoration, 0,5 pour la limite) ; d) 1 point (0,5 pour $n = 6$, 0,5 pour la fraction).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : intégrale sur un segment et sommes de Riemann

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Intégration sur un segment » en maths sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégration sur un segment](#).

Retrouvez tous les [**contrôles de maths sup** classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).