

Corrigé du contrôle de maths sup : hyperplans, matrices et changements de base

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours sur la trace	3,5 points
Exercice 2 : Formes linéaires et hyperplans de $\mathbb{R}^4$	4 points
Exercice 3 : Équations linéaires et sous-espaces affines	3,5 points
Exercice 4 : Changement de base et puissances d'une matrice	4,5 points
Exercice 5 : Matrices de rang 1 et similitude	4,5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours sur la trace (3,5 points)

a. Notons $A = (a_{ik})$ et $B = (b_{ki})$. La matrice AB est carrée de taille n et

$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki}$. En échangeant les deux sommes finies :

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^p (BA)_{kk}.$$

Donc $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

b. Si $M' = Q^{-1} M Q$ avec Q inversible, alors par a) appliqué aux matrices $Q^{-1} M$ et

$Q : \operatorname{tr}(M') = \operatorname{tr}((Q^{-1}M)Q) = \operatorname{tr}(Q(Q^{-1}M)) = \operatorname{tr}(M)$. **Deux matrices semblables ont la même trace.**

- c. Par linéarité de la trace et par a), $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$. Or $\operatorname{tr}(I_n) = n \neq 0$ car $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. **L'égalité $AB - BA = I_n$ est donc impossible.**
- d. Comme $p \circ p = p$, on a $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. Soit $r = \operatorname{rg} p$. Dans une base adaptée à cette somme directe (base de $\operatorname{Im} p$ puis base de $\operatorname{Ker} p$), p fixe les r premiers vecteurs et annule les autres : sa matrice est diagonale avec r coefficients égaux à 1 puis des 0. La trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base d'après b), donc $\operatorname{tr} p = r = \operatorname{rg} p$.

Barème : a) 1 point (0,5 pour le coefficient diagonal, 0,5 pour l'échange des sommes) ; b) 0,5 point ; c) 1 point ; d) 1 point (0,5 pour la base adaptée, 0,5 pour la conclusion avec l'invariance de la trace).

Exercice 2 : Formes linéaires et hyperplans de $\mathbb{R}^4$ (4 points)

- a. φ est une forme linéaire non nulle ($\varphi(1, 0, 0, 0) = 1$), donc son noyau H_1 est un hyperplan : $\dim H_1 = 3$. Les vecteurs $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, -1)$ sont dans H_1 . Ils forment une famille libre : si $a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0$, les trois dernières coordonnées donnent $-a = -b = -c = 0$. **(v_1, v_2, v_3) est une base de H_1** , car c'est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3.
- b. Le vecteur $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ vérifie $\varphi(e_1) = 1 \neq 0$, donc $e_1 \notin H_1$ et $H_1 \cap \operatorname{Vect}(e_1) = \{0\}$. Comme $3 + 1 = 4 = \dim E$, $E = H_1 \oplus \operatorname{Vect}(e_1)$.
- c. $(x, y, z, t) \in F$ équivaut à $x + y + z + t = 0$ et $x - y + 2z = 0$. La seconde équation donne $x = y - 2z$, puis la première $t = -x - y - z = -2y + z$. Donc
$$(x, y, z, t) = y(1, 1, 0, -2) + z(-2, 0, 1, 1).$$

On vérifie que $w_1 = (1, 1, 0, -2)$ et $w_2 = (-2, 0, 1, 1)$ satisfont les deux équations. Ils ne sont pas colinéaires (deuxième et troisième coordonnées). **(w_1, w_2) est une base de F et $\dim F = 2$.**

- d. Notons $H = \text{Ker } \alpha = \text{Ker } \beta$, hyperplan car $\alpha \neq 0$. Choisissons $a \notin H$: alors $\alpha(a) \neq 0$ et $E = H \oplus \text{Vect}(a)$. Posons $\lambda = \frac{\beta(a)}{\alpha(a)}$. La forme linéaire $\beta - \lambda \alpha$ est nulle sur H (car α et β y sont nulles) et en a par choix de λ . Elle est donc nulle sur $H \oplus \text{Vect}(a) = E$. Ainsi $\beta = \lambda \alpha$. Deux équations d'un même hyperplan sont proportionnelles.

Barème : a) 1 point (0,5 pour la dimension, 0,5 pour la base) ; b) 0,5 point ; c) 1,5 point (0,5 pour la résolution, 0,5 pour la famille génératrice, 0,5 pour la liberté et la dimension) ; d) 1 point (0,5 pour le choix de α et λ , 0,5 pour la conclusion).

Exercice 3 : Équations linéaires et sous-espaces affines (3,5 points)

- a. Les formes $(x, y, z) \rightarrow x + y + z$ et $(x, y, z) \rightarrow x - y + 2z$ ne sont pas proportionnelles : leurs noyaux sont deux plans vectoriels distincts, dont l'intersection est une droite. Cherchons les solutions : en additionnant les deux équations, $2x + 3z = 3$. Le point $A = (0, 1, 1)$ convient : $0 + 1 + 1 = 2$ et $0 - 1 + 2 = 1$. L'intersection est donc non vide, et c'est $A + \vec{D}$, où $\vec{D}$ est l'ensemble des solutions du système homogène $x + y + z = 0$, $x - y + 2z = 0$. Le vecteur $\vec{v} = (3, -1, -2)$ vérifie $3 - 1 - 2 = 0$ et $3 + 1 - 4 = 0$, et il est non nul.
 $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (0, 1, 1) + \text{Vect}((3, -1, -2))$, droite affine.
- b. u est linéaire et $\deg(P - P') \leq 3$, donc $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$. Si $u(P) = 0$ avec $P \neq 0$, alors $P = P'$, ce qui est impossible car $\deg P' < \deg P$. Donc u est injectif. En dimension finie, un endomorphisme injectif est bijectif : **u est un automorphisme.**
- L'équation $u(P) = X^3$ a donc une unique solution. Avec $P = X^3 + 3X^2 + 6X + 6$, on a $P' = 3X^2 + 6X + 6$ et $P - P' = X^3$. **L'unique solution est $P = X^3 + 3X^2 + 6X + 6$.**
- c. Soit $v : P \rightarrow P''$, linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même. $\mathcal{S}$ est l'ensemble des solutions de $v(P) = 6X$. Le polynôme X^3 est une solution particulière. Donc $\mathcal{S} = X^3 + \text{Ker } v$, et $\text{Ker } v = \mathbb{R}_1[X]$ (les polynômes de dérivée seconde nulle). **$\mathcal{S} = X^3 + \mathbb{R}_1[X]$ est un plan affine de direction $\mathbb{R}_1[X]$, de dimension 2.**

Barème : a) 1,5 point (0,5 pour le point, 0,5 pour la direction, 0,5 pour la justification de la structure) ; b) 1 point (0,5 pour la bijectivité, 0,5 pour la solution) ; c) 1 point.

Exercice 4 : Changement de base et puissances d'une matrice **(4,5 points)**

- a. Si $a\epsilon_1 + b\epsilon_2 + c\epsilon_3 = 0$, alors $a + b = 0$, $a - b + c = 0$ et $a - c = 0$. On en tire $b = -a$, $c = a$, puis $3a = 0$: $a = b = c = 0$. La famille est libre, de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}^3$: c'est une base. Ses vecteurs en colonnes donnent

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- b. $f(\epsilon_1) = (2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2) = (4, 4, 4) = 4\epsilon_1$;
 $f(\epsilon_2) = (2 - 1, 1 - 2, 1 - 1) = (1, -1, 0) = \epsilon_2$;
 $f(\epsilon_3) = (1 - 1, 2 - 1, 1 - 2) = (0, 1, -1) = \epsilon_3$.
 $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

- c. Résolvons $P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$: $a + b = y_1$, $a - b + c = y_2$, $a - c = y_3$.
 . On a $b = y_1 - a$ et $c = a - y_3$, puis $3a - y_1 - y_3 = y_2$. D'où
 $a = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, $b = \frac{2y_1 - y_2 - y_3}{3}$, $c = \frac{y_1 + y_2 - 2y_3}{3}$.

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $P P^{-1} = I_3$ (par exemple, la première ligne de P contre la première colonne donne $\frac{1+2}{3} = 1$).

- d. La formule de changement de base pour un endomorphisme donne $D = P^{-1} A P$, soit $A = P D P^{-1}$. Par récurrence, $A^k = P D^k P^{-1}$ avec $D^k = I_3 + (4^k - 1) E_{11}$, où E_{11} a pour seul coefficient non nul un 1 en position $(1, 1)$. Donc $A^k = I_3 + (4^k - 1) P E_{11} P^{-1}$. Or $P E_{11} P^{-1}$ est le produit de la première colonne de P par la première ligne de P^{-1} :

$$P E_{11} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} J.$$

Donc $A^k = I_3 + \frac{4^k - 1}{3} J$ pour tout $k \geq 0$ (pour $k = 0$ on retrouve I_3 , pour $k = 1$ on retrouve $A = I_3 + J$).

e. $\text{tr } A = 2 + 2 + 2 = 6$ et $\text{tr } D = 4 + 1 + 1 = 6$, conformément à l'exercice 1 b). De plus $A - I_3 = J$, dont les trois colonnes sont égales et non nulles : $\text{rg}(A - I_3) = 1$.

f. Dans $\mathcal{B}'$, la matrice de q est E_{11} . Dans $\mathcal{B}$, c'est $P E_{11} P^{-1} = \frac{1}{3} J$ d'après d). **Sa trace vaut** $\frac{1}{3} \times 3 = 1$, égale au rang de q (qui est $\dim \text{Vect}(\varepsilon_1) = 1$), comme prévu par l'exercice 1 d).

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point (0,5 pour les images, 0,5 pour D) ; c) 1 point ; d) 1 point (0,5 pour $A = PDP^{-1}$, 0,5 pour la formule de A^k) ; e) 0,5 point ; f) 0,5 point.

Exercice 5 : Matrices de rang 1 et similitude (4,5 points)

a. Comme $\text{rg } A = 1$, A est équivalente à J_1 : il existe $Q, R \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = Q J_1 R$. Notons E_1 la première colonne de I_n : $J_1 = E_1 E_1^T$. Alors $A = (Q E_1)(E_1^T R)$. On pose $X = Q E_1$ (première colonne de Q) et $Y^T = E_1^T R$ (première ligne de R). Ces matrices sont non nulles car Q et R sont inversibles. **Ainsi** $A = X Y^T$ avec X, Y non nulles.

b. D'après l'exercice 1 a) avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $Y^T \in \mathcal{M}_{1,n}$: $\text{tr}(X Y^T) = \text{tr}(Y^T X)$. La matrice $Y^T X$ est de taille 1×1 , égale à sa trace, donc $Y^T X = \text{tr } A$. Par associativité, $A^2 = X (Y^T X) Y^T = (\text{tr } A) X Y^T$, soit $A^2 = (\text{tr } A) A$.

c. Posons $t = \text{tr } A \neq 0$ et $M = \frac{1}{t} A$. Alors $M^2 = \frac{1}{t^2} A^2 = \frac{t A}{t^2} = M$: l'endomorphisme p canoniquement associé à M vérifie $p \circ p = p$, **c'est un projecteur**, de rang $\text{rg } M = 1$. Dans une base adaptée à $\mathbb{K}^n = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ (un vecteur de $\text{Im } p$, puis $n - 1$ vecteurs de $\text{Ker } p$), la matrice de p est J_1 . Si Q est la matrice de passage correspondante, $M = Q J_1 Q^{-1}$, donc $A = Q (t J_1) Q^{-1}$: **A est semblable à $(\text{tr } A) J_1$.**

d. Si $\text{tr } A = 0$, alors $A^2 = 0$ par b). Soit g l'endomorphisme canoniquement associé. Comme $\text{rg } g = 1$, il existe v tel que $w = g(v) \neq 0$, et $\text{Im } g = \text{Vect}(w)$. De $g \circ g = 0$, on tire $\text{Im } g \subset \text{Ker } g$, donc $w \in \text{Ker } g$. Le noyau est de dimension $n - 1$ (théorème du rang) : on complète (w) en une base $(w, k_3, \dots, k_n)$ de $\text{Ker } g$. Comme $v \notin \text{Ker } g$ et que $\text{Ker } g$ est un hyperplan, $\mathcal{C} = (w, v, k_3, \dots, k_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. On a $g(w) = 0$, $g(v) = w$ et $g(k_i) = 0$: la matrice de g dans $\mathcal{C}$ a pour seul coefficient non nul un 1 en ligne 1, colonne 2. **A est semblable à E_{12} .**

Conclusion : deux matrices semblables ont la même trace (exercice 1 b). Réciproquement, si A et B sont de rang 1 et de même trace t , elles sont toutes deux semblables à tJ_1 (si $t \neq 0$) ou à E_{12} (si $t = 0$). La similitude étant une relation d'équivalence, **A et B sont semblables si et seulement si $\text{tr } A = \text{tr } B$.**

Erreur fréquente : oublier le cas $\text{tr } A = 0$, où A n'est pas un multiple de projecteur mais une matrice nilpotente.

Barème : a) 1 point ; b) 1 point (0,5 pour $Y^T X = \text{tr } A$, 0,5 pour A^2) ; c) 1,5 point (0,5 pour le projecteur, 1 pour la base adaptée et la similitude) ; d) 1 point (0,5 pour la base $\mathcal{C}$, 0,5 pour la conclusion).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : hyperplans, matrices et changements de base

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Hyperplans et sous-espaces affines » en maths sup](#) et [« Matrices et applications linéaires » en maths sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [hyperplans et sous-espaces affines](#), [matrices et applications linéaires](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths sup sur ce thème

- [Contrôle de maths sup : problème d'algèbre linéaire type concours](#)