

Corrigé du contrôle de maths sup : fonctions usuelles, réciproques et primitives

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours	3 points
Exercice 2 : Fonctions circulaires réciproques	5 points
Exercice 3 : Inégalités usuelles	3 points
Exercice 4 : Calculs de primitives et d'intégrales	5 points
Exercice 5 : Une intégrale fonction de ses bornes	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

- a. La fonction $\tan$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, avec des limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes. Elle réalise donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, dont Arctan est la réciproque.

Elle est dérivable, de dérivée $1 + \tan^2$, qui ne s'annule jamais. Par le théorème de dérivation d'une réciproque, Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x ,

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan } x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

On a bien $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- b. On a $\text{ch } x + \text{sh } x = e^x$ et $\text{ch } x - \text{sh } x = e^{-x}$. En multipliant,
 $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = e^x e^{-x} = 1$.

La fonction $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$ est dérivable car $\text{ch} > 0$. Comme $\text{sh}' = \text{ch}$ et $\text{ch}' = \text{sh}$, la dérivée d'un quotient donne

$$\text{th}' = \frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = 1 - \text{th}^2 = \frac{1}{\text{ch}^2}.$$

Les deux formules sont établies.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la bijection, 0,5 pour la non-annulation de la dérivée, 0,5 pour le calcul ; b) 1,5 point : 0,5 pour $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$, 1 pour la dérivée de th sous ses deux formes.

Exercice 2 : Fonctions circulaires réciproques (5 points)

- a. Posons $g(x) = \text{Arctan } x + \text{Arctan} \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. La fonction g est dérivable comme somme et composée, et

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Comme $]0, +\infty[$ est un intervalle, g y est constante, égale à $g(1) = 2\text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\text{Arctan } x + \text{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ **pour** $x > 0$.

La fonction g est impaire, car Arctan l'est. **Pour** $x < 0$, **la somme vaut donc** $-\frac{\pi}{2}$.

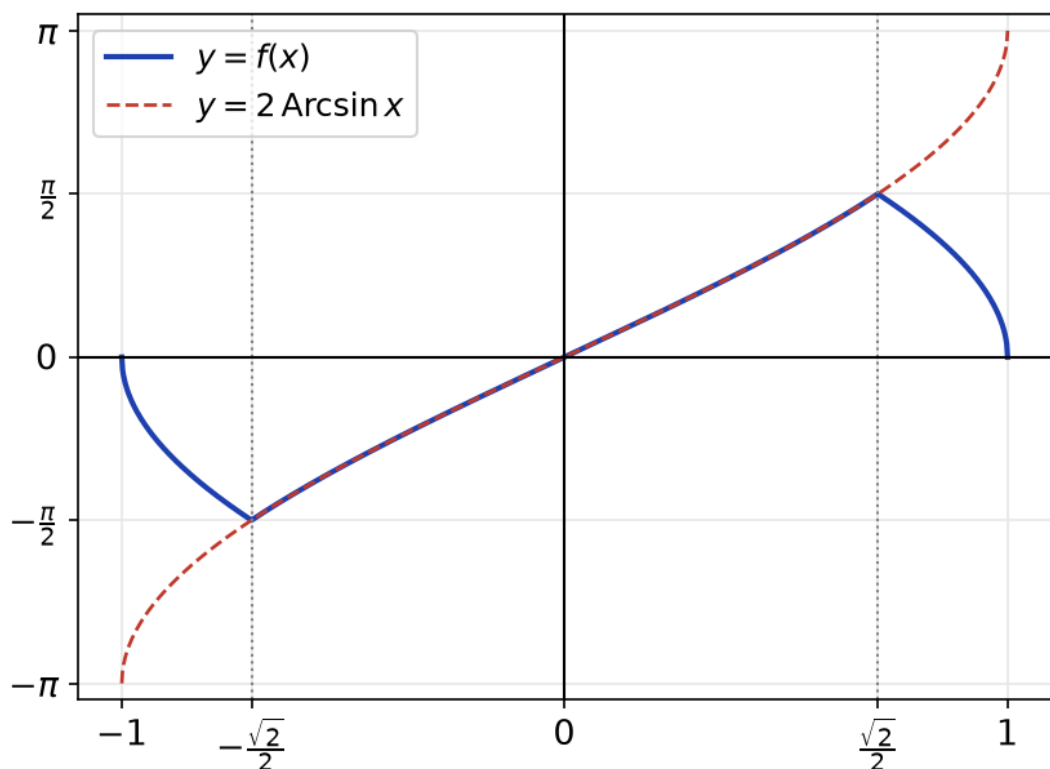
b.

- i. Pour $x \in [-1, 1]$, la racine est définie. De plus, l'inégalité $2|u||v| \leq u^2 + v^2$ avec $u = x$ et $v = \sqrt{1-x^2}$ donne $|2x\sqrt{1-x^2}| \leq x^2 + 1 - x^2 = 1$. **Donc** f **est définie sur** $[-1, 1]$.

ii. Posons $\theta = \operatorname{Arcsin} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $x = \sin \theta$ et $\cos \theta \geq 0$, donc $\sqrt{1-x^2} = \cos \theta$. Ainsi $2x\sqrt{1-x^2} = \sin(2\theta)$ et $f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin 2\theta)$. Or $\operatorname{Arcsin}(\sin y) = y$ seulement si $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On distingue donc trois cas.

- Si $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, alors $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et $2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. **Donc** $f(x) = 2\operatorname{Arcsin} x$.
- Si $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, alors $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\pi - 2\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $\sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta$, $f(x) = \pi - 2\operatorname{Arcsin} x$.
- Si $x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, alors $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$, donc $-\pi - 2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Comme $\sin(-\pi - 2\theta) = \sin 2\theta$, $f(x) = -\pi - 2\operatorname{Arcsin} x$.

Les trois expressions coïncident aux points $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, où elles valent $\pm \frac{\pi}{2}$.



c. Posons $h(x) = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$. La fonction h est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$, avec $h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Elle est donc constante sur $] -1, 1[$, puis sur $[-1, 1]$ par continuité. Or $h(0) = \frac{\pi}{2} + 0$. **Ainsi** $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$ **sur** $[-1, 1]$.

Erreur fréquente : écrire $\text{Arcsin}(\sin 2\theta) = 2\theta$ sans vérifier que 2θ est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la dérivée nulle, 0,5 pour l'argument d'intervalle et la valeur en 1, 0,5 pour le cas $x < 0$; b) i) 0,5 point ; ii) 2 points : 0,5 pour $\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$, 0,5 par cas correctement justifié ; c) 1 point : 0,5 pour la dérivée, 0,5 pour la constante avec l'argument de continuité.

Exercice 3 : Inégalités usuelles (3 points)

a. Posons $g(x) = \cosh x - 1 - \frac{x^2}{2}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $g'(x) = \sinh x - x$ et $g''(x) = \cosh x - 1 \geq 0$. Donc g' est croissante, et comme $g'(0) = 0$, elle est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi g décroît puis croît, et atteint son minimum en 0, où $g(0) = 0$. **Donc** $\cosh x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$ **pour tout réel** x .

b. Posons $h(x) = x - \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$. Alors $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, du signe de x . Donc h admet un minimum en 0, égal à $h(0) = 0$. **Ainsi** $\ln(1+x) \leq x$ **pour** $x > -1$.

Ensuite, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin'' = -\sin \leq 0$, donc $\sin$ est concave. Une fonction concave est au-dessus de ses cordes. La corde joignant $(0, 0)$ à $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ a pour équation $y = \frac{2x}{\pi}$. **Donc** $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ **sur** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour g' et g'' , 0,5 pour le signe de g' , 0,5 pour la conclusion ; b) 1,5 point : 0,75 pour $\ln(1+x) \leq x$, 0,75 pour la concavité et l'équation de la corde.

Exercice 4 : Calculs de primitives et d'intégrales (5 points)

- a. La forme canonique donne $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(1 + u^2)$ avec $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.
Comme $\frac{du}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, une primitive est $x \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. Donc

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{Arctan} \sqrt{3} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Ainsi $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

- b. Le discriminant est positif : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. On cherche $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-1}$. En multipliant par $x-2$ puis en prenant $x=2$, on trouve $\alpha = 1$; de même $\beta = -1$. Sur $]2, +\infty[$, **une primitive est**
 $x \rightarrow \ln(x-2) - \ln(x-1) = \ln \frac{x-2}{x-1}$.

- c. On a $e^x \cos x = \operatorname{Re}(e^{(1+i)x})$, et une primitive de $e^{(1+i)x}$ est $\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} = \frac{1-i}{2} e^x (\cos x + i \sin x)$. Sa partie réelle vaut $\frac{e^x (\cos x + \sin x)}{2}$. Donc

$$J = \left[\frac{e^x (\cos x + \sin x)}{2} \right]_0^\pi = \frac{-e^\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$

Ainsi $J = -\frac{e^\pi + 1}{2}$.

- d. Posons $u(x) = \operatorname{Arctan} x$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Par intégration par parties,

$$K = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{Arctan} x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx.$$

L'intégrale restante vaut $1 - \frac{\pi}{4}$, donc $K = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$. **Ainsi** $K = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

- e. La fonction $x \rightarrow e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Avec $t = e^x$, on a $dt = e^x dx$, donc $dx = \frac{dt}{t}$, et les bornes deviennent 1 et e :

$$L = \int_1^e \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left[\ln t - \ln(t+1) \right]_1^e = 1 - \ln(1+e) + \ln 2.$$

Ainsi $L = 1 + \ln \frac{2}{1+e}$ (environ 0,38).

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la forme canonique, 0,5 pour la primitive, 0,5 pour la valeur ; b) 1 point : 0,5 pour la décomposition, 0,5 pour la primitive ; c) 1 point : 0,5 pour la primitive complexe, 0,5 pour la valeur ; d) 1 point : 0,5 pour l'intégration par parties, 0,5 pour le résultat ; e) 0,5 point.

Exercice 5 : Une intégrale fonction de ses bornes (4 points)

- a. La fonction φ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Par le théorème fondamental de l'analyse, elle y admet une primitive G , de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $x > 0$, le segment $[x, 2x]$ est inclus dans $]0, +\infty[$, donc $F(x) = G(2x) - G(x)$ est bien défini. Par composition, F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2 \frac{e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x}.$$

Donc $F'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}.$

- b. Pour $x > 0$, on a $-2x < -x$, donc $e^{-2x} < e^{-x}$ par stricte croissance de l'exponentielle. Ainsi $F'(x) < 0$. **La fonction F est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.**

- c. Pour $t \in [x, 2x]$, la décroissance de $t \rightarrow e^{-t}$ donne $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$. En multipliant par $\frac{1}{t} > 0$, puis en intégrant entre x et $2x$ (bornes dans le bon ordre), on obtient par croissance de l'intégrale

$$e^{-2x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leq F(x) \leq e^{-x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t}.$$

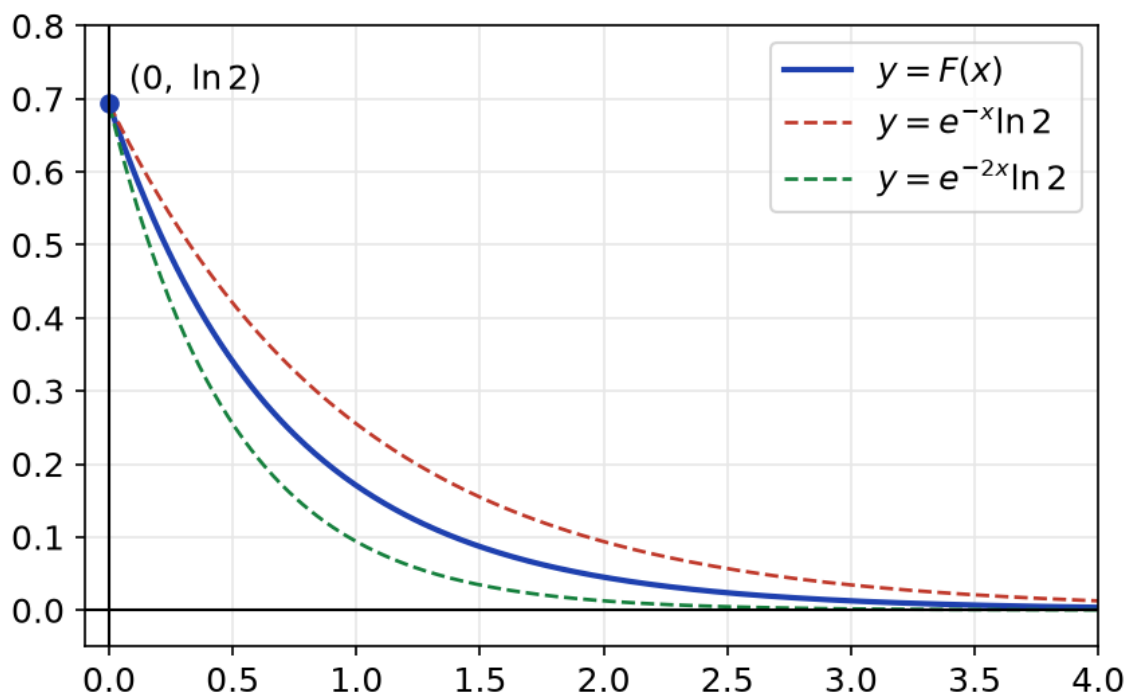
Or $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln(2x) - \ln x = \ln 2$. **Donc** $e^{-2x} \ln 2 \leq F(x) \leq e^{-x} \ln 2$.

Quand $x \rightarrow 0$, les deux bornes tendent vers $\ln 2$; quand $x \rightarrow +\infty$, elles tendent vers 0. Par le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \ln 2$ **et** $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

- d. La limite en 0 étant finie, on prolonge F par continuité en posant $F(0) = \ln 2$. Le prolongement est continu sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissant :

x	0		$+\infty$
-----	---	--	-----------

$F'(x)$		—	
F	$\ln 2$	décroissante	0



Erreur fréquente : dériver F en écrivant $F'(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$, en oubliant le facteur 2 dû à la composée $x \rightarrow G(2x)$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour l'existence d'une primitive (continuité citée), 0,5 pour $F = G(2x) - G(x)$, 0,5 pour F' ; b) 0,5 point ; c) 1,5 point : 0,5 pour l'encadrement de l'intégrande, 0,5 pour $\ln 2$, 0,5 pour les limites ; d) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : fonctions usuelles, réciproques et primitives

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Fonctions usuelles](#) » en maths sup et « [Calcul de primitives](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés fonctions usuelles, calcul de primitives**.

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).