

Corrigé du contrôle de maths sup : fonctions de deux variables et extremums

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours	3 points
Exercice 2 : Continuité en l'origine	4 points
Exercice 3 : Gradient, plan tangent et règle de la chaîne	4 points
Exercice 4 : Une équation aux dérivées partielles	4 points
Exercice 5 : Points critiques et extremums	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

- a. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$, elle admet en a le développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a_1 + h, a_2 + k) = f(a) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(|(h, k)|).$$

Le plan tangent au point $(a_1, a_2, f(a))$ a donc pour équation

$$z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2).$$

- b. Supposons par exemple que f admette un maximum local en a : il existe $r > 0$ tel que $f(b) \leq f(a)$ pour tout $b \in \mathcal{U}$ avec $|b - a| < r$. Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, quitte à diminuer

r , la boule ouverte de centre a et de rayon r est incluse dans U .

Considérons alors $\psi(t) = f(a_1 + t, a_2)$, définie sur $] -r, r[$. Cette fonction d'une variable admet un maximum local en 0, point intérieur à l'intervalle. De plus, elle est dérivable en 0, de dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$. Or une fonction dérivable qui admet un extremum local en un point intérieur y a une dérivée nulle, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$. On montre de même que $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ avec $t \rightarrow f(a_1, a_2 + t)$. Ainsi, $\nabla f(a) = 0$: a **est un point critique**. Le cas d'un minimum se traite de la même façon.

L'ouverture de U sert à garantir que ψ est définie sur un intervalle ouvert centré en 0. Sur un fermé, un extremum atteint au bord n'est pas nécessairement un point critique.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour le développement limité, 0,5 point pour le plan tangent ; b) 2 points : 1 point pour la restriction à une droite et le théorème en dimension 1, 0,5 point pour la conclusion, 0,5 point pour le rôle de l'ouvert.

Exercice 2 : Continuité en l'origine (4 points)

a. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $x^2 \leq x^2 + y^2$, donc

$$|f(x, y)| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \leq |y| \leq |(x, y)|.$$

Le majorant tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, donc $f(x, y) \rightarrow 0 = f(0, 0)$.

Ainsi, f **est continue en** $(0, 0)$. En polaires, on écrirait $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \cos^2 \theta \sin \theta$, majoré en valeur absolue par r , indépendamment de θ .

b. Pour $t \neq 0$, $g(t, t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$. Donc $g(t, t) \rightarrow \frac{1}{2}$ quand $t \rightarrow 0$, alors que $(t, t) \rightarrow (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, g **n'est pas continue en** $(0, 0)$.

c. Pour tout t , $f(t, 0) = 0$ et $f(0, t) = 0$. Les fonctions partielles sont donc constantes, d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Ensuite, pour $t \neq 0$, $f(t, t) = \frac{t^3}{2t^2} = \frac{t}{2}$, donc

$$\frac{f((0, 0) + t v) - f(0, 0)}{t} = \frac{1}{2},$$

quantité constante qui tend donc vers $\frac{1}{2}$ quand $t \rightarrow 0$. La dérivée selon v existe et vaut

$D_v f(0, 0) = \frac{1}{2}$. Si f était de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, le développement limité à l'ordre 1 donnerait $D_v f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot v = 0$. C'est contradictoire : **f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.**

Erreur fréquente : conclure à la continuité de g en n'étudiant que les limites selon les axes, qui sont toutes nulles.

Barème : a) 1,5 point : 1 point pour la majoration, 0,5 point pour la conclusion ; b) 1 point : 0,5 point pour le chemin, 0,5 point pour la conclusion ; c) 1,5 point : 0,5 point pour les dérivées partielles, 0,5 point pour la dérivée selon v , 0,5 point pour la contradiction.

Exercice 3 : Gradient, plan tangent et règle de la chaîne (4 points)

a. La fonction f est une somme de produits de fonctions de classe C^1 (polynomiales en x et y , et exponentielle de y). Elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y$,
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x e^y + 2y$.

b. On a $f(1, 0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1$. Le plan tangent a donc pour équation $z = 1 + (x - 1) + y$, soit $z = x + y$.

c. Le gradient $\nabla f(1, 0) = (1, 1)$ indique la direction de plus forte croissance : c'est celle du vecteur unitaire $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. Selon ce vecteur, la dérivée vaut $|\nabla f(1, 0)| = \sqrt{2}$.

d. La fonction $t \rightarrow (\cos t, \sin t)$ est dérivable et f est de classe C^1 . D'après la règle de la chaîne,

$$\varphi'(t) = -\sin t \frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t) + \cos t \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \sin t) = -\sin t e^{\sin t} + \cos t (\cos t e^{\sin t} + 2 \sin t).$$

Vérification : $\varphi(t) = \cos t e^{\sin t} + \sin^2 t$. En dérivant directement, on obtient
 $\varphi'(t) = -\sin t e^{\sin t} + \cos^2 t e^{\sin t} + 2\sin t \cos t$, ce qui est bien la même expression. En particulier, $\varphi'(0) = 0 + 1 \times (1 + 0) = 1$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la justification, 0,5 point pour les dérivées ; b) 1 point ; c) 0,5 point ; d) 1,5 point : 1 point pour la règle de la chaîne, 0,25 point pour la vérification, 0,25 point pour $\varphi'(0)$.

Exercice 4 : Une équation aux dérivées partielles (4 points)

a. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Le système $x + y = u$, $x - y = v$ a pour unique solution
 $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$. Donc Φ est bijective, de réciproque
 $\Phi^{-1}(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$. Les deux applications sont linéaires, donc de classe C^1 .

b. La fonction $g = f \circ \Phi^{-1}$ est de classe C^1 comme composée, et
 $f(x, y) = g(x + y, x - y)$. Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x + y, x - y) + \frac{\partial g}{\partial v}(x + y, x - y) ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x + y, x - y) - \frac{\partial g}{\partial v}(x + y, x - y).$$

c. D'après b), $(\mathcal{E})$ équivaut à $2\frac{\partial g}{\partial v}(x + y, x - y) = x + y$ pour tout (x, y) . Comme Φ est bijective, cela équivaut à $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{u}{2}$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Fixons u . La fonction $v \rightarrow g(u, v) - \frac{uv}{2}$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$; elle est donc constante, égale à sa valeur $h(u) = g(u, 0)$ en $v = 0$. La fonction h est de classe C^1 , car g l'est. Ainsi, $g(u, v) = \frac{uv}{2} + h(u)$.

Réciproquement, pour toute fonction h de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, la fonction g ainsi définie est C^1 et vérifie $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{u}{2}$. En revenant à x et y , avec $uv = x^2 - y^2$, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc **les fonctions** $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + h(x + y)$, où **h est de classe C^1**

sur $\mathbb{R}$. Vérification directe : $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x + h'(x+y) + y - h'(x+y) = x + y$.

d. La condition s'écrit $\frac{x^2}{2} + h(x) = x^2$, donc $h(x) = \frac{x^2}{2}$ pour tout x . Alors

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{2x^2 + 2xy}{2}, \text{ d'où } f(x, y) = x^2 + xy. \text{ On vérifie : } \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = (2x + y) - x = x + y \text{ et } f(x, 0) = x^2.$$

Erreur fréquente : intégrer $\frac{\partial g}{\partial u} = u$ en ajoutant une constante au lieu d'une fonction de u .

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la réciproque, 0,5 point pour la classe C^1 ; b) 1 point ; c) 1,5 point : 0,5 point pour l'équation en g , 0,5 point pour l'intégration à u fixé, 0,5 point pour la réciproque et la forme des solutions ; d) 0,5 point.

Exercice 5 : Points critiques et extremums (5 points)

a. La fonction f est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et

$\nabla f(x, y) = (2x + y - 3, x + 2y - 3)$. Le système $2x + y = 3, x + 2y = 3$ donne, par soustraction, $x = y$, puis $3x = 3$. Le seul point critique de f est donc $(1, 1)$.

b. En développant, on vérifie que

$$(x-1)^2 + (x-1)(y-1) + (y-1)^2 = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 3. \text{ Posons } a = x-1 \text{ et } b = y-1 :$$

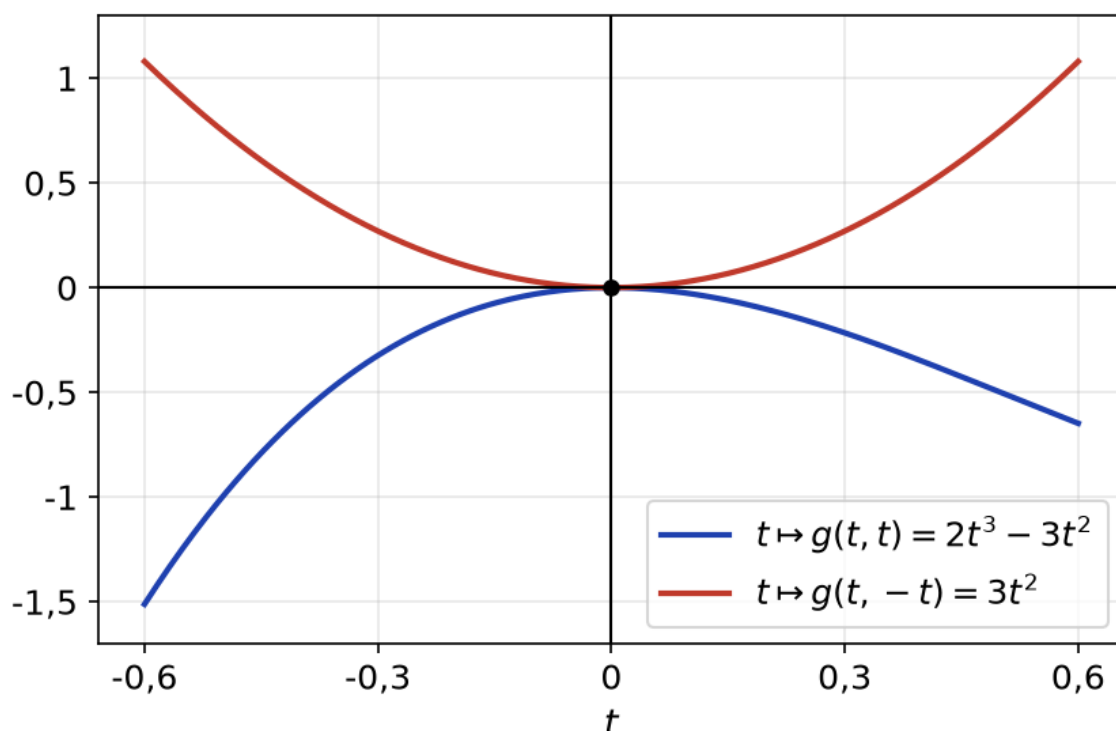
$$f(x, y) + 3 = a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $a = b = 0$. Ainsi, f **admet un minimum global égal à -3 , atteint uniquement en $(1, 1)$** . En revanche, $f(x, 0) = x^2 - 3x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$: f n'admet pas de maximum global.

c. La fonction g est polynomiale, donc de classe C^1 , et

$\nabla g(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$. Les points critiques vérifient $y = x^2$ et $x = y^2$, donc $x = x^4$, soit $x(x^3 - 1) = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 1$. Les points critiques de g sont donc $(0, 0)$ **et** $(1, 1)$.

- d. On a $g(t, t) = 2t^3 - 3t^2 = t^2(2t - 3)$, strictement négatif pour $0 < |t| < \frac{3}{2}$, et $g(t, -t) = t^3 - t^3 + 3t^2 = 3t^2$, strictement positif pour $t \neq 0$. Dans tout voisinage de $(0, 0)$, g prend donc des valeurs strictement inférieures et strictement supérieures à $g(0, 0) = 0$: $(0, 0)$ **n'est pas un extremum local**, c'est un point col.



- e. Développons, sachant que $g(1, 1) = 1 + 1 - 3 = -1$:

$$g(1+h, 1+k) = (1+3h+3h^2+h^3) + (1+3k+3k^2+k^3) - 3(1+h+k+hk),$$

ce qui donne $g(1+h, 1+k) = -1 + 3h^2 - 3hk + 3k^2 + h^3 + k^3$. On obtient bien $g(1+h, 1+k) - g(1, 1) = 3(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3$.

Notons $r = \sqrt{h^2 + k^2}$. D'une part, $hk \leq \frac{h^2 + k^2}{2}$, donc $h^2 - hk + k^2 \geq \frac{r^2}{2}$. D'autre part, $|h| \leq r$ et $|k| \leq r$, donc $|h^3 + k^3| \leq |h|h^2 + |k|k^2 \leq r r^2$. Par conséquent,

$$g(1+h, 1+k) - g(1, 1) \geq \frac{3}{2} r^2 - r^3 = r^2 \left(\frac{3}{2} - r \right),$$

et ce minorant est positif dès que $r \leq \frac{3}{2}$. Ainsi, g **admet en $(1, 1)$ un minimum local égal à -1** . Ce minimum n'est pas global : $g(x, 0) = x^3 \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$, donc g prend des valeurs inférieures à -1 , par exemple $g(-2, 0) = -8$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour le gradient, 0,5 point pour la résolution ; b) 1 point : 0,5 point pour la forme canonique, 0,25 point pour le minimum global, 0,25 point pour l'absence de maximum ; c) 1 point ; d) 0,5 point ; e) 1,5 point : 0,5 point pour le développement, 0,75 point pour la minoration, 0,25 point pour le caractère non global.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : fonctions de deux variables et extremums

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Fonctions de deux variables](#) » en maths [sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fonctions de deux variables](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).