Corrigé du contrôle de maths sup : équivalents et développements limités

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours	2,5 points
Exercice 2 : Équivalents de suites et de fonctions	3,5 points
Exercice 3 : Développements limités	4 points
Exercice 4 : Calculs de limites	2,5 points
Exercice 5 : Asymptote et position d'une courbe	3,5 points
Exercice 6 : Problème : les solutions de tan x = x	4 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Questions de cours (2,5 points)

a. Lorsque (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, $u_n \sim v_n$ signifie que $\frac{u_n}{v_n} \to 1$. Sous les hypothèses de l'énoncé, $\frac{u_n w_n}{v_n t_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{w_n}{t_n}$ tend vers $1 \times 1 = 1$. De même, $\frac{u_n / w_n}{v_n / t_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{t_n}{w_n}$ tend vers 1. **Les équivalents sont donc compatibles avec le produit et le quotient.**

b. Pour la somme, prenons $u_n = n + 2$, $v_n = n + 1$ et $w_n = t_n = -n$. On a bien $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$. Pourtant $u_n + w_n = 2$ et $v_n + t_n = 1$, dont le quotient vaut 2. **Ainsi $u_n + w_n$ n'est pas équivalent à $v_n + t_n$.** Pour l'exponentielle,

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$n+1 \sim n$, mais $\frac{e^{n+1}}{e^n} = e$ ne tend pas vers 1. **Donc** e^{n+1} **n'est pas équivalent à** e^n **: on ne compose pas un équivalent par l'exponentielle.**

c. Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ quand $n \to +\infty$.

Barème : a) 1 point : 0,5 pour la définition, 0,5 pour les deux preuves ; b) 1 point : 0,5 par contre-exemple ; c) 0,5 point.

Exercice 2 : Équivalents de suites et de fonctions (3,5 points)

a. Par la quantité conjuguée, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Or $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$. **Donc** $u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ **.**

b. Comme $s_n = \sin\frac{1}{n} \to 0$ et $\ln(1+s) \sim s$ quand $s \to 0$, on obtient $v_n \sim \sin\frac{1}{n}$. Or $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$. **Donc** $v_n \sim \frac{1}{n}$**.**

c. Pour $x>0$, $f(x) = \ln\frac{x^2+x}{x^2} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, donc $f(x) \sim \frac{1}{x}$ en $+\infty$. On ne peut pas soustraire des équivalents : partir de $\ln(x^2+x) \sim 2\ln x$ conduirait à la différence $2\ln x - 2\ln x = 0$, qui ne peut être équivalente à rien.

d. $w_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Par Stirling, $(2n)! \sim \sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$ et $(n!)^2 \sim 2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$. Le quotient d'équivalents est licite, d'où $w_n \sim \frac{2\sqrt{\pi n}\,2^{2n}}{2\pi n}$. **Ainsi** $[\dbinom?]2nn \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$**.**

e. Le quotient $n! \,/\, \left(\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\right)$ tend vers 1, donc son logarithme tend vers 0 : $\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1)$. Alors $\ln z_n - \ln\frac{n}{e} = \frac{\ln(n!)}{n} - \ln n + 1 = \frac{\ln(2\pi n)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, qui tend vers 0. Par continuité de l'exponentielle, $\frac{z_n}{n/e} \to 1$. **Donc** $(n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e}$**.**

Barème : a), b), c) 0,5 point chacun ; d) 1 point : 0,5 pour Stirling appliqué deux fois, 0,5 pour la simplification ; e) 1 point : 0,5 pour le passage au logarithme, 0,5 pour la conclusion.

Exercice 3 : Développements limités (4 points)

a. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$. On fait le produit en ne gardant que les termes de degré au plus 3. Le coefficient de x vaut $1 - 1 = 0$, celui de x^2 vaut $1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, et celui de x^3 vaut $-1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$.

$$\frac{e^x}{1+x} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

b. La fonction $\tan$ est de classe C^∞ au voisinage de 0, donc elle admet un développement limité à tout ordre (Taylor-Young). Elle est impaire, donc $\tan x = x + a\,x^3 + b\,x^5 + o(x^5)$, car $\tan'(0) = 1$. Or $\tan' = 1 + \tan^2$, et on peut dériver le développement de $\tan$ (celui de $\tan'$ existe). Ainsi $1 + 3a\,x^2 + 5b\,x^4 = 1 + x^2 + 2a\,x^4 + o(x^4)$. Par unicité, $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2a}{5} = \frac{2}{15}$.

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

c. On écrit $\cos x = 1 + u$ avec $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. Comme $u = O(x^2)$, l'ordre 2 en u suffit : $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(x^4)$, avec $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$. Comme $\frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{12}$:

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

d. $\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$. Donc $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$. Il vient $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} + o(1)$.
La limite vaut $\frac{1}{3}$.

Erreur fréquente : en c), développer $\ln(1+u)$ à l'ordre 4 en u : c'est inutile, car $u^3 = O(x^6)$.

Barème : 1 point par question ; pour a), b), c) : 0,5 pour la méthode et l'ordre justifiés, 0,5 pour les coefficients ; pour d) : 0,5 pour le développement de $1/\sin^2 x$, 0,5 pour la limite.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 4 : Calculs de limites (2,5 points)

a. $\ln a_n = n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n = n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n = -\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$. Par continuité de l'exponentielle, $a_n \to e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

b. Au voisinage de 0, $\cos x > 0$, et d'après l'exercice 3 c), $\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + O(x^2)$. **Donc** $(\cos x)^{1/x^2} \to e^{-1/2}$.

c. D'après l'exercice 3 b), $\tan x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$. De plus, $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6}$. Le quotient d'équivalents donne $\frac{\tan x - x}{x - \sin x} \sim \frac{x^3/3}{x^3/6} = 2$. **La limite vaut 2.**

Barème : a) 1 point : 0,5 pour le développement de $\ln a_n$, 0,5 pour la limite ; b) 0,5 point ; c) 1 point : 0,5 pour les deux équivalents, 0,5 pour la limite.

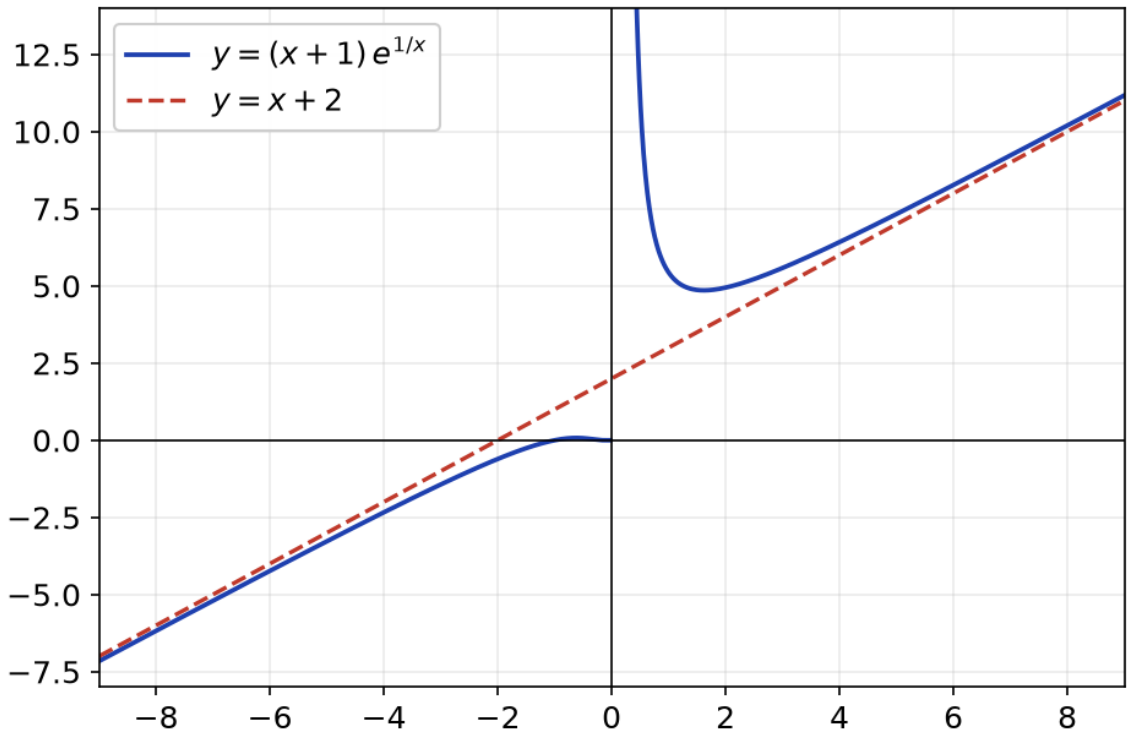
Exercice 5 : Asymptote et position d'une courbe (3,5 points)

a. Quand $x \to \pm\infty$, $h = \frac{1}{x} \to 0$ et $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$. Donc

$$f(x) = (x+1)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Le facteur x donne $x + 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, et le facteur 1 donne $1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. En additionnant, $f(x) = x + 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, en $+\infty$ comme en $-\infty$.

b. $f(x) - (x+2) = \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 : **la droite $\Delta : y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$** . De plus, $f(x) - (x+2) \sim \frac{3}{2x}$, qui a le signe de x . **$\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ au voisinage de $+\infty$ et en dessous au voisinage de $-\infty$.**



c. On pose $u = x + x^2 \to 0$: $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$. Or $u^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3)$ et $u^3 = x^3 + o(x^3)$. D'où $g(x) = x + x^2 - \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, c'est-à-dire

$$g(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

La tangente en 0 a pour équation $y = x$. De plus, $g(x) - x \sim \frac{x^2}{2}$, qui est positif. **La courbe de g est donc au-dessus de sa tangente au voisinage de 0, des deux côtés.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour le changement de variable, 1 pour le développement ; b) 1 point : 0,5 pour l'asymptote, 0,5 pour les deux positions ; c) 1 point : 0,5 pour le développement, 0,5 pour la tangente et la position.

Exercice 6 : Problème : les solutions de tan x = x (4 points)

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

a. Soit $\varphi(x) = \tan x - x$ sur I_n. Elle est continue et dérivable, avec $\varphi'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$. Cette dérivée ne s'annule qu'en $x = n\pi$, point isolé, donc φ est strictement croissante sur I_n. Aux bornes, $\tan x$ tend vers $-\infty$ à gauche et vers $+\infty$ à droite, tandis que x reste borné. Donc φ tend vers $-\infty$ et $+\infty$. D'après le théorème de la bijection (valeurs intermédiaires et stricte monotonie), φ **s'annule en un unique point** x_n **de** I_n.

b. Comme $n \geq 1$, $x_n > n\pi - \frac{\pi}{2} > 0$, donc $\tan x_n = x_n > 0$. Or, sur I_n, $\tan x > 0$ équivaut à $x \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, et en divisant par $n\pi$, le théorème d'encadrement donne $\frac{x_n}{n\pi} \to 1$. **Donc** $x_n \sim n\pi$.

c. D'après b), $y_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Par π-périodicité de la tangente, $\tan y_n = \tan x_n = x_n$, qui tend vers $+\infty$. Comme $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $y_n = \arctan x_n$, qui tend vers $\frac{\pi}{2}$. **Donc** $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.

d. On a $z_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan z_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - y_n\right) = \frac{1}{\tan y_n}$. **Donc** $\tan z_n = \frac{1}{x_n}$, puis $z_n = \arctan\frac{1}{x_n}$. Comme $\arctan u = u + O(u^3)$ et $\frac{1}{x_n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, on obtient $z_n = \frac{1}{x_n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ensuite, grâce à c) :

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi\, n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Enfin $x_n = n\pi + y_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - z_n$, d'où

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi\, n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Le développement asymptotique demandé est établi. À titre de contrôle, pour $n = 10$, la formule donne environ $32{,}9565$, pour une valeur exacte proche de $32{,}9564$.

Barème : a) 1 point : 0,5 pour la stricte monotonie, 0,5 pour les limites et la conclusion ; b) 0,5 point ; c) 1 point : 0,5 pour $\tan y_n = x_n$, 0,5 pour la limite ; d) 1,5 point : 0,5 pour $\tan z_n = 1/x_n$, 0,5 pour le développement de $1/x_n$, 0,5 pour la conclusion.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : équivalents et développements limités

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Relations de comparaison » en maths sup et « Développements limités » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** relations de comparaison, développements limités.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.