Corrigé du contrôle de maths sup : équations différentielles linéaires

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours	3 points
Exercice 2 : Variation de la constante	5 points
Exercice 3 : Recollement en un point singulier	4 points
Exercice 4 : Second ordre à coefficients constants	5 points
Exercice 5 : Décharge d'un circuit RLC	3 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours (3 points)

a. **Théorème.** Soit A une primitive de a sur I. Les solutions sur I de $y' + a(x)y = 0$ sont exactement les fonctions $x \to \lambda\, e^{-A(x)}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. La fonction a est continue sur l'intervalle I, donc elle admet une primitive A, dérivable sur I. Soit y une fonction dérivable sur I ; posons $z = y\, e^{A}$. Alors z est dérivable et

$$z' = \left(y' + A' y\right)e^{A} = \left(y' + a\, y\right)e^{A}.$$

Comme e^{A} ne s'annule pas, y est solution si et seulement si $z' = 0$ sur I. Or I est un

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

intervalle, donc cela équivaut à z constante : $z = \lambda$, soit $y = \lambda\, e^{-A}$. **L'ensemble des solutions est** $\{x \to \lambda\, e^{-A(x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

b. **Principe de superposition.** Si y_1 est solution de $y' + ay = b_1$ et y_2 solution de $y' + ay = b_2$, alors, pour tous réels λ_1 et λ_2, la fonction $\lambda_1\, y_1 + \lambda_2\, y_2$ est solution de $y' + ay = \lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2$.

Démonstration. Par linéarité de la dérivation,

$$(\lambda_1\, y_1 + \lambda_2\, y_2)' + a(\lambda_1\, y_1 + \lambda_2\, y_2) = \lambda_1(y_1' + ay_1) + \lambda_2(y_2' + ay_2) = \lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2.$$

Le principe est démontré.

Barème : a) 2 points : 0,5 pour l'énoncé, 0,5 pour l'introduction de $z = y\, e^A$, 0,5 pour le calcul de z', 0,5 pour l'argument d'intervalle ; b) 1 point : 0,5 pour l'énoncé, 0,5 pour la preuve.

Exercice 2 : Variation de la constante (5 points)

a. Sur I, la fonction $\tan$ est continue et $\cos x > 0$. Une primitive de $\tan$ est $A(x) = -\ln(\cos x)$, donc $e^{-A(x)} = \cos x$. D'après le théorème du cours, **les solutions de l'équation homogène sont les fonctions** $x \to \lambda \cos x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. Cherchons les solutions sous la forme $y(x) = \lambda(x)\cos x$, avec λ dérivable sur I. Alors $y'(x) = \lambda'(x)\cos x - \lambda(x)\sin x$, et

$$y' + \tan(x)\, y = \lambda'(x)\cos x - \lambda(x)\sin x + \lambda(x)\sin x = \lambda'(x)\cos x.$$

Ainsi y est solution de (E) si et seulement si $\lambda'(x)\cos x = \cos^2 x$, c'est-à-dire $\lambda'(x) = \cos x$, soit $\lambda(x) = \sin x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) **sur** I **sont les fonctions** $x \to \sin x \cos x + C\cos x$, $C \in \mathbb{R}$.

Vérification pour $C = 0$: $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $\tan(x)\, y = \sin^2 x$, dont la somme vaut bien $\cos^2 x$.

c. La condition $y(0) = 2$ donne $0 + C = 2$, donc $C = 2$. L'unicité découle du théorème de

Cauchy, puisque les coefficients sont continus sur I et que l'équation est résolue en y' (on la voit aussi directement : C est imposée). **La solution est $x \to (\sin x + 2)\cos x$.**

d. Pour le second membre $\cos x$, la variation de la constante donne $\lambda'(x)\cos x = \cos x$, donc $\lambda(x) = x$ convient : $x \to x\cos x$ est une solution particulière. Par le principe de superposition, $x \to \sin x\cos x + x\cos x$ est solution de l'équation complète, et l'on ajoute les solutions homogènes. **Les solutions sont les $x \to (\sin x + x + C)\cos x$, $C \in \mathbb{R}$.**

Barème : a) 1 point : 0,5 pour la primitive de $\tan$ avec $\cos x > 0$, 0,5 pour les solutions ; b) 2 points : 0,5 pour la forme cherchée, 0,5 pour la simplification, 0,5 pour λ, 0,5 pour l'ensemble des solutions ; c) 1 point : 0,5 pour $C = 2$, 0,5 pour l'unicité ; d) 1 point : 0,5 pour la solution particulière $x\cos x$, 0,5 pour la superposition.

Exercice 3 : Recollement en un point singulier (4 points)

a. Sur $J =]0,+\infty[$ ou $J =]-\infty,0[$, le coefficient x ne s'annule pas, et (F) équivaut à $y' - \frac{2}{x}y = x^2$. Une primitive de $-\frac{2}{x}$ est $-2\ln|x|$, donc les solutions homogènes sont les $x \to \lambda\, e^{2\ln|x|} = \lambda\, x^2$.

Posons $y = \lambda(x)x^2$: l'équation devient $\lambda'(x)x^2 = x^2$, soit $\lambda' = 1$ et $\lambda(x) = x + C$.

Sur $]0,+\infty[$, les solutions sont les $x \to x^3 + Cx^2$; sur $]-\infty,0[$, ce sont les $x \to x^3 + Dx^2$, avec C, D réels.

b. *Analyse.* Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Ses restrictions sont solutions sur chaque demi-droite : il existe C et D tels que $y(x) = x^3 + Cx^2$ pour $x > 0$ et $y(x) = x^3 + Dx^2$ pour $x < 0$. En $x = 0$, l'équation donne $0 \times y'(0) - 2y(0) = 0$, donc $y(0) = 0$.

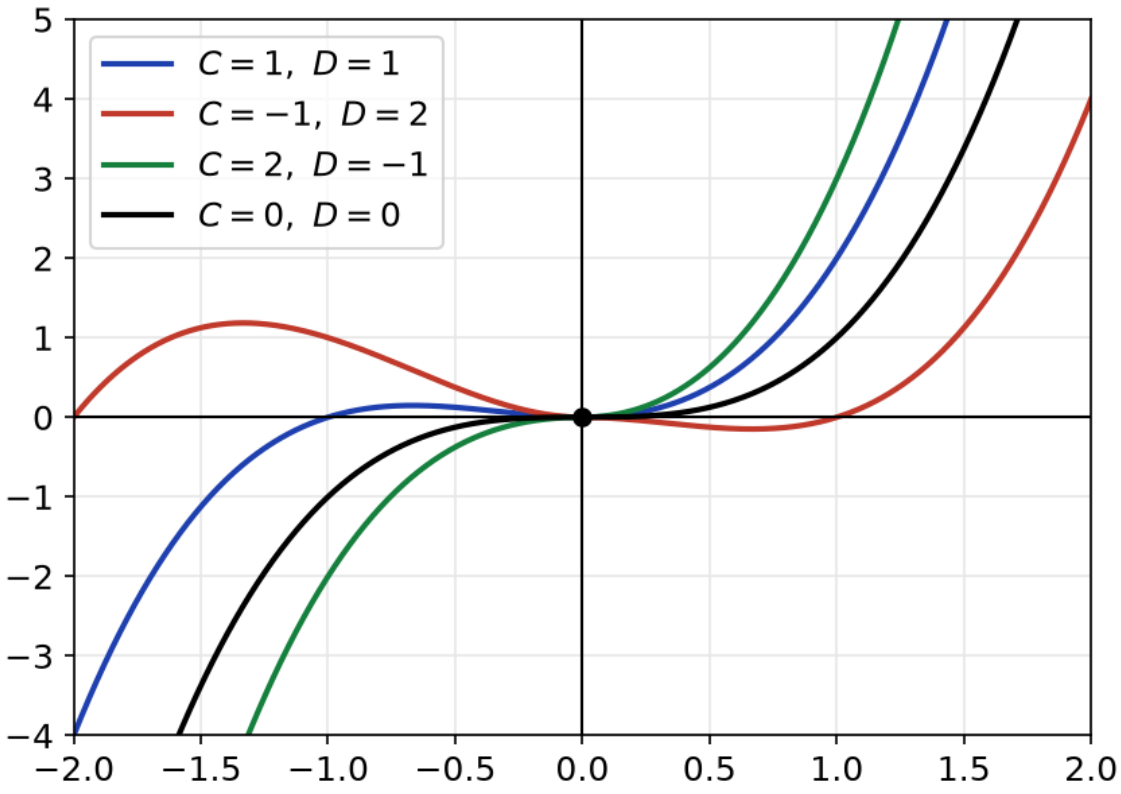
Synthèse. Soit C et D réels et y définie par $y(x) = x^3 + Cx^2$ si $x \geq 0$, et $y(x) = x^3 + Dx^2$ si $x < 0$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie (F) sur $\mathbb{R}^*$. En 0, le taux d'accroissement vaut

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$\frac{y(x)-y(0)}{x} = x^2 + Cx$$
$$, \text{ si } x > 0, \quad x^2 + Dx$$
$$, \text{ si } x < 0,$$

et tend vers 0 des deux côtés. Donc y est dérivable en 0, avec $y'(0) = 0$, et $0 \times 0 - 2 \times 0 = 0^3$: l'équation est vérifiée en 0.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions égales à $x^3 + Cx^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et à $x^3 + Dx^2$ sur $\mathbb{R}_-$, avec $(C,D) \in \mathbb{R}^2$ quelconque.



c. Toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ vérifient $y(0) = 0$: **il y en a une infinité (une par couple (C,D)), et aucune ne vérifie $y(0) = 1$.**

Le théorème de Cauchy s'applique à une équation $y' + a(x)y = b(x)$ avec a et b continues sur un intervalle. Pour mettre (F) sous cette forme, il faut diviser par x, ce qui est impossible sur un intervalle contenant 0. **Le théorème ne s'applique donc pas sur $\mathbb{R}$, et il n'y a aucune contradiction.**

Erreur fréquente : imposer $C = D$ par « continuité ». Les deux morceaux se raccordent pour toutes les valeurs de C et D, avec la même dérivée nulle en 0.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour les solutions homogènes, 0,5 pour la variation de la constante, 0,5 pour les deux intervalles ; b) 1,5 point : 0,5 pour $y(0) = 0$, 0,5 pour la dérivabilité en 0, 0,5 pour la description complète ; c) 1 point : 0,5 pour les nombres de solutions, 0,5 pour l'explication.

Exercice 4 : Second ordre à coefficients constants (5 points)

a. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, soit $(r-1)(r-2) = 0$. Ses racines sont réelles et distinctes : 1 et 2. **Les solutions homogènes sont les** $x \to \lambda e^x + \mu e^{2x}$**,** $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$**.**

b. Cherchons $y_p(x) = \alpha x + \beta$. Alors $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = -3\alpha + 2\alpha x + 2\beta$. Par identification avec $2x + 1$, on a $2\alpha = 2$ et $2\beta - 3\alpha = 1$, donc $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. **Les solutions sont les** $x \to x + 2 + \lambda e^x + \mu e^{2x}$**.**

c. Le réel 1 est racine simple de l'équation caractéristique : les fonctions $x \to \alpha e^x$ sont solutions homogènes, donc elles ne peuvent pas fournir le second membre e^x. C'est le cas résonant, où l'on cherche $y_p(x) = \alpha x e^x$.

On calcule $y_p'(x) = \alpha(x+1)e^x$ et $y_p''(x) = \alpha(x+2)e^x$. Donc

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = \alpha e^x\big[(x+2) - 3(x+1) + 2x\big] = -\alpha e^x.$$

Il faut donc $-\alpha = 1$. **Ainsi** $\alpha = -1$**, et** $x \to -x e^x$ **est une solution particulière.**

d. Le nombre i n'est pas racine de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution de $y'' - 3y' + 2y = 10e^{ix}$ sous la forme $z(x) = Ae^{ix}$, avec $A \in \mathbb{C}$. On obtient $A(i^2 - 3i + 2) = A(1 - 3i) = 10$, donc

$$A = \frac{10}{1-3i} = \frac{10(1+3i)}{10} = 1 + 3i.$$

Les coefficients de l'équation étant réels, la partie réelle de z est solution avec le second membre $\mathrm{Re}(10e^{ix}) = 10\cos x$. Or $\mathrm{Re}\big((1+3i)(\cos x + i\sin x)\big) = \cos x - 3\sin x$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Une solution particulière est $x \to \cos x - 3\sin x$**.** Vérification : $y'' = -\cos x + 3\sin x$ et $-3y' = 3\sin x + 9\cos x$, tandis que $2y = 2\cos x - 6\sin x$. La somme vaut bien $10\cos x$.

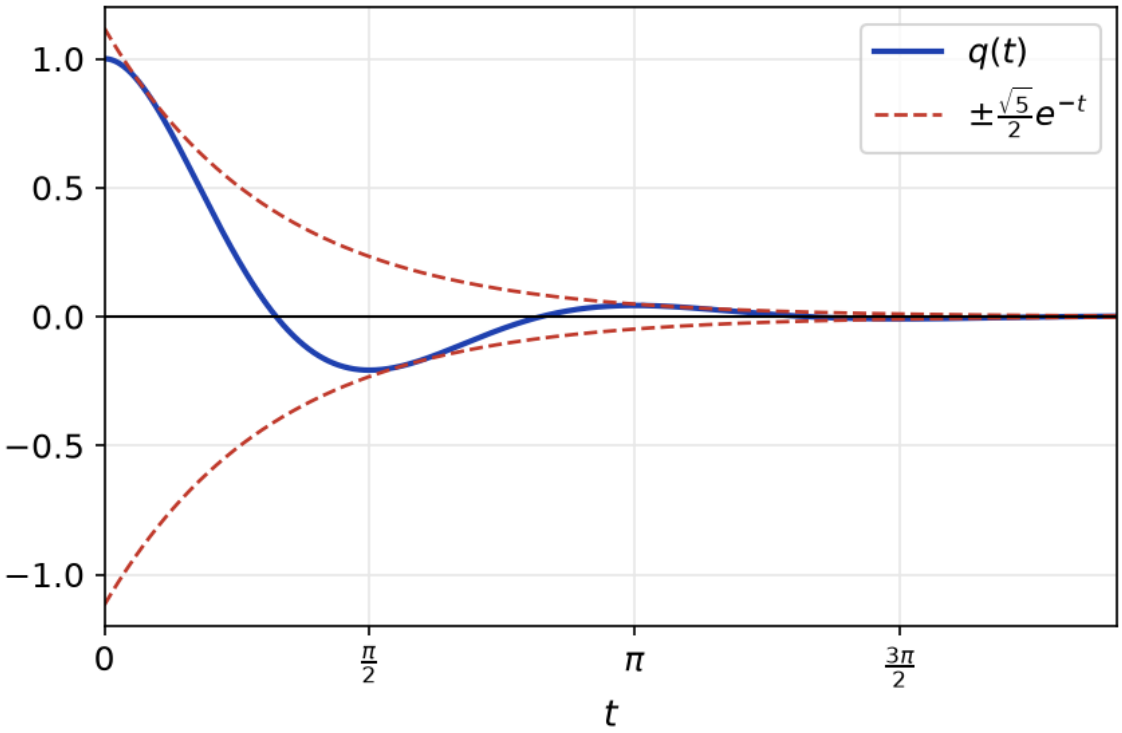
Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 pour la solution particulière, 0,5 pour la solution générale ; c) 1,5 point : 0,5 pour la justification de la forme, 0,5 pour les dérivées, 0,5 pour α *; d) 1,5 point : 0,5 pour* A *, 0,5 pour le passage à la partie réelle justifié, 0,5 pour la solution réelle.*

Exercice 5 : Décharge d'un circuit RLC (3 points)

a. L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 5 = 0$ a pour discriminant -16, donc pour racines $-1 \pm 2i$. Les solutions réelles sont les $t \to e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$. Ensuite, $q(0) = A = 1$. De plus, $q'(t) = e^{-t}\big[(2B - A)\cos 2t - (2A + B)\sin 2t\big]$, donc $q'(0) = 2B - A = 0$ et $B = \frac{1}{2}$. Par unicité de la solution du problème de Cauchy, $q(t) = e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$.

b. Les racines sont complexes non réelles, de partie réelle négative : **le régime est pseudo-périodique, de pseudo-période** $\frac{2\pi}{2} = \pi$**.**

c. Posons $R = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Il existe un réel φ tel que $\cos\varphi = \frac{1}{R}$ et $\sin\varphi = \frac{1}{2R}$, et alors $\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t = R\cos(2t - \varphi)$. Ainsi $|q(t)| = R\,e^{-t}\big|\cos(2t - \varphi)\big|$, donc $|q(t)| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-t}$. Comme $e^{-t} \to 0$, le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = 0$: le condensateur se décharge en oscillant.



Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour les racines, 0,5 pour la forme générale, 0,5 pour les constantes ; b) 0,5 point ; c) 1 point : 0,5 pour la majoration, 0,5 pour la limite.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : équations différentielles linéaires

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Équations différentielles linéaires » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** équations différentielles linéaires.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.