Corrigé du contrôle de maths sup : dimension finie et formule de Grassmann

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours	3 points
Exercice 2 : Sous-espaces définis par des équations	4 points
Exercice 3 : Rang d'une famille, bases extraites et complétées	4 points
Exercice 4 : Supplémentaires dans un espace de polynômes	3 points
Exercice 5 : Problème : suites récurrentes linéaires d'ordre 2	6 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

a. Dans E de dimension n, **toute famille libre de n vecteurs est une base, et toute famille génératrice de n vecteurs est une base**.

b. Les sous-espaces F, G et $F \cap G$ sont de dimension finie, car ils sont inclus dans E. Soit $(c_1, \dots, c_p)$ une base de $F \cap G$ (famille vide si $F \cap G = \{0\}$). C'est une famille libre de F et de G. D'après le théorème de la base incomplète, on la complète en une base $(c_1, \dots, c_p, f_1, \dots, f_q)$ de F et en une base $(c_1, \dots, c_p, g_1, \dots, g_r)$ de G. Montrons que $\mathcal{B} = (c_1, \dots, c_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est une base de $F + G$.

D'abord, $\mathcal{B}$ est génératrice de $F + G$: tout $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ est

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

combinaison des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Ensuite, $\mathcal{B}$ est libre. Supposons $\sum \alpha_i c_i + \sum \beta_j f_j + \sum \gamma_k g_k = 0$. Alors $\sum \gamma_k g_k = -\sum \alpha_i c_i - \sum \beta_j f_j$ appartient à G et à F, donc à $F \cap G$. Il s'écrit donc $\sum \delta_i c_i$. Ainsi $\sum \gamma_k g_k - \sum \delta_i c_i = 0$, et la liberté de la base de G donne tous les γ_k nuls. Il reste $\sum \alpha_i c_i + \sum \beta_j f_j = 0$, et la liberté de la base de F donne tous les α_i et β_j nuls.

Par conséquent, $\dim(F+G) = p+q+r = (p+q)+(p+r)-p$. **Donc** $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$**.**

c. Par définition, $E = F \oplus G$ équivaut à $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$. Si $F \cap G = \{0\}$, Grassmann donne $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$. Or le sous-espace $F+G$ de E est égal à E si et seulement si sa dimension vaut n. **Donc** $E = F \oplus G$ **si et seulement si** $F \cap G = \{0\}$ **et** $\dim F + \dim G = n$**.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 2 points : 0,5 pour la construction des bases par le théorème de la base incomplète, 0,5 pour le caractère générateur, 0,5 pour la liberté, 0,5 pour la conclusion ; c) 0,5 point.

Exercice 2 : Sous-espaces définis par des équations (4 points)

a. La seconde équation donne $x = y - 2z$. En reportant dans la première, $t = -x - y - z = -2y + z$. Ainsi

$$F = \left\{(y-2z,\, y,\, z,\, -2y+z)\ ,\ (y,\, z)z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}(u_1,\, u_2),$$

avec $u_1 = (1,1,0,-2)$ et $u_2 = (-2,0,1,1)$. Cette famille est libre, car ses coordonnées d'indices 2 et 3 sont $(1,0)$ et $(0,1)$. (u_1, u_2) **est une base de** F **et** $\dim F = 2$**.**

b. v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de v_2 est nulle, pas celle de v_1). La famille (v_1, v_2) est donc libre et génératrice de G : $\dim G = 2$. Un vecteur de G s'écrit $\alpha\, v_1 + \beta\, v_2 = (\beta - \alpha, \alpha, \alpha, -\alpha)$. La première équation de F donne $\beta - \alpha + \alpha + \alpha - \alpha = \beta = 0$, et la seconde $\beta - \alpha - \alpha + 2\alpha = \beta = 0$. **Donc** $F \cap G = \mathrm{Vect}(v_1)$ **, de dimension 1.** On remarque d'ailleurs que $v_1 = u_1 + u_2$.

c. Par la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = 2+2-1$, **soit** $\dim(F+G) = 3$. Soit

$H = \{(x, y, z, : 2y - z, z + t = 0\}$. On a $t = z - 2y$, donc $H = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -2), (0, 0, 1, 1)\big)$. Ces trois vecteurs forment une famille libre (coordonnées 1 à 3), donc $\dim H = 3$. De plus, u_1, u_2 et v_2 vérifient l'équation : $2 - 0 - 2 = 0$, $0 - 1 + 1 = 0$ et $0 = 0$. Ainsi $F + G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_2) \subset H$. **Les dimensions étant égales,** $F + G = H$**.**

d. Si $(a, b, 0, 0) \in F$, alors $a + b = 0$ et $a - b = 0$, donc $a = b = 0$: $F \cap \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \{0\}$. De plus, $\dim F + \dim \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = 2 + 2 = 4$. D'après l'exercice 1 c), $\mathbb{R}^4 = F \oplus \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la résolution, 0,5 pour la famille génératrice, 0,5 pour la liberté et la dimension ; b) 1 point : 0,5 pour $\dim G$ *, 0,5 pour l'intersection ; c) 1 point : 0,5 pour Grassmann, 0,5 pour l'égalité par inclusion et dimension ; d) 0,5 point.*

Exercice 3 : Rang d'une famille, bases extraites et complétées (4 points)

a. On vérifie coordonnée par coordonnée : $2w_1 - w_2 = (2 - 2, 4 - 1, 0 - 1, 2 - 0) = (0, 3, -1, 2)$ et $w_2 - w_1 = (1, -1, 1, -1)$. **Donc** $w_3 = 2w_1 - w_2$ **et** $w_4 = w_2 - w_1$**.** Ainsi $W = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$. Or w_1 et w_2 ne sont pas colinéaires, car la troisième coordonnée de w_1 est nulle, pas celle de w_2. **Le rang de la famille est** $\dim W = 2$**.**

b. D'après a), (w_1, w_2) **est une base de** W , extraite de la famille.

c. Montrons que (w_1, w_2, e_1, e_2) est libre. Si $\alpha\, w_1 + \beta\, w_2 + \gamma\, e_1 + \delta\, e_2 = 0$, alors $(\alpha + 2\beta + \gamma, 2\alpha + \beta + \delta, \beta, \alpha) = 0$. On obtient $\beta = \alpha = 0$, puis $\gamma = \delta = 0$. C'est une famille libre de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$, de dimension 4. **C'est donc une base de** $\mathbb{R}^4$ **qui complète** (w_1, w_2)**.**

d. Les polynômes 1 , $X - 2$ et $(X - 2)^2$ sont de degrés 0, 1 et 2, donc la famille est libre (degrés échelonnés). Elle compte 3 vecteurs, et $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$. **C'est donc une base de** $\mathbb{R}_2[X]$**.** Par la formule de Taylor en 2, ou en développant, $X^2 = (X - 2)^2 + 4(X - 2) + 4$. **Les coordonnées de** X^2 **sont** $(4, 4, 1)$ **.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 par relation, 0,5 pour le rang ; b) 0,5 point ; c) 1 point : 0,5 pour la liberté, 0,5 pour l'argument dimensionnel ; d) 1 point : 0,5 pour la base, 0,5 pour les coordonnées.

Exercice 4 : Supplémentaires dans un espace de polynômes (3 points)

a. Le polynôme nul est dans F, et si $P, Q \in F$, alors $(P + \lambda Q)(\pm 1) = 0$: F est un sous-espace. Un polynôme P admet 1 et -1 pour racines si et seulement si $(X-1)(X+1)$ le divise. Pour $\deg P \leq 3$, cela signifie $P = (X^2-1)(aX+b)$, avec a, b réels. Ainsi $F = \mathrm{Vect}\big(X^2-1, X(X^2-1)\big)$. Ces deux polynômes sont de degrés 2 et 3, distincts, donc la famille est libre. $\big(X^2-1, X^3-X\big)$ **est une base de** F **et** $\dim F = 2$**.**

b. Un polynôme de $F \cap G$ est de degré au plus 1 et admet deux racines distinctes : il est nul. Donc $F \cap G = \{0\}$. De plus, $\dim F + \dim G = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$. D'après la caractérisation dimensionnelle, $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$.

c. $X^3 + X^2 = X(X^2-1) + (X^2-1) + X + 1$. **La composante dans** F **est** $X^3 + X^2 - X - 1 = (X+1)(X^2-1)$**, et celle dans** G **est** $X+1$**.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour le sous-espace, 0,5 pour la factorisation, 0,5 pour la base et la dimension ; b) 1 point : 0,5 pour l'intersection, 0,5 pour l'argument de dimension ; c) 0,5 point.

Exercice 5 : Problème : suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (6 points)

a. La suite nulle appartient à $\mathcal{E}$. Si $u, v \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout n, $u_{n+2} + \lambda v_{n+2} = (u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + 2(u_n + \lambda v_n)$. $\mathcal{E}$ **est donc un sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$**.**

b. Les suites a et b existent, car une suite de $\mathcal{E}$ est entièrement déterminée par ses deux premiers termes. Soit $u \in \mathcal{E}$ et $v = u - u_0\, a - u_1\, b$. Alors $v \in \mathcal{E}$, avec $v_0 = 0$ et $v_1 = 0$. Par récurrence double, si $v_n = v_{n+1} = 0$, alors $v_{n+2} = 0$. Donc $v = 0$ et $u = u_0\, a + u_1\, b$: la famille (a, b) est génératrice. Elle est aussi libre : si $\lambda\, a + \mu\, b = 0$, les termes d'indices 0 et 1 donnent $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. **(a, b) est une base de $\mathcal{E}$, donc $\dim \mathcal{E} = 2$.**

c. Pour $q \neq 0$, $(q^n) \in \mathcal{E}$ équivaut à $q^{n+2} = q^{n+1} + 2q^n$ pour tout n, c'est-à-dire, en divisant par q^n, à $q^2 - q - 2 = 0$. Or $q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1)$. **Les valeurs cherchées sont $q = 2$ et $q = -1$.**

d. Les suites (2^n) et $\left((-1)^n\right)$ sont dans $\mathcal{E}$. Si $\lambda\, 2^n + \mu\, (-1)^n = 0$ pour tout n, alors $n = 0$ et $n = 1$ donnent $\lambda + \mu = 0$ et $2\lambda - \mu = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$. C'est une famille libre de deux vecteurs dans $\mathcal{E}$, de dimension 2. **C'est donc une base de $\mathcal{E}$, et toute suite de $\mathcal{E}$ s'écrit $u_n = \alpha\, 2^n + \beta\, (-1)^n$ avec α, β réels.**

e. On résout $\alpha + \beta = 0$ et $2\alpha - \beta = 3$: $3\alpha = 3$, donc $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. **Donc $u_n = 2^n - (-1)^n$.** Contrôle : $u_2 = u_1 + 2u_0 = 3 = 4 - 1$ et $u_3 = u_2 + 2u_1 = 9 = 8 + 1$.

f. Soit $u = \alpha\, 2^n + \beta\, (-1)^n$. Si $\alpha \neq 0$, alors $|u_n| \geq |\alpha|\, 2^n - |\beta|$, qui tend vers $+\infty$: u n'est pas bornée. Réciproquement, $\beta(-1)^n$ est bornée. Donc $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\left(\left((-1)^n\right)\right)$, sous-espace de dimension 1. Par ailleurs, $u_0 = \alpha + \beta$, donc $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}\left((2^n - (-1)^n)\right)$, de dimension 1. Une suite de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ s'écrit $\beta(-1)^n$ avec $u_0 = \beta = 0$, donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{0\}$. Enfin $\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{G} = 2 = \dim \mathcal{E}$. **Donc $\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$.**

Erreur fréquente : en d), vérifier à la main que toute suite de $\mathcal{E}$ est combinaison de (2^n) et $\left((-1)^n\right)$. C'est inutile : la liberté et la dimension 2 suffisent.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 1 pour le caractère générateur (récurrence), 0,5 pour la liberté et la dimension ; c) 1 point ; d) 1 point : 0,5 pour la liberté, 0,5 pour l'argument dimensionnel ; e) 1 point ; f) 1 point : 0,5 pour la description de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, 0,5 pour la conclusion.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Après le corrigé du contrôle : dimension finie et formule de Grassmann

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Dimension finie » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** dimension finie.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.