

Corrigé du contrôle de maths sup : dérivation, accroissements finis et convexité

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Théorème de Rolle et accroissements finis	3 points
Exercice 2 : Dérivabilité en un point et limite de la dérivée	4 points
Exercice 3 : Rolle pour les polynômes et formule de Leibniz	4 points
Exercice 4 : Accroissements finis et suite récurrente	4 points
Exercice 5 : Problème – convexité et inégalités	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Théorème de Rolle et accroissements finis (3 points)

- a. **Théorème de Rolle** : soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $a < b$ et $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$. Par le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum m et un maximum M . Si $m = M$, f est constante et tout $c \in]a, b[$ convient.

Sinon, l'une des deux valeurs diffère de $f(a) = f(b)$, par exemple $M > f(a)$. Le maximum

est alors atteint en un point c qui n'est ni a ni b , donc $c \in]a, b[$. En ce point intérieur, f présente un extremum local et elle est dérivable. **Donc** $f'(c) = 0$. Le cas $m < f(a)$ se traite de même.

b. Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Posons $p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $\varphi(x) = f(x) - p(x - a)$.

La fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$. Le théorème de Rolle fournit $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = f'(c) - p = 0$.

Il existe donc $c \in]a, b[$ **tel que** $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour l'énoncé complet, 0,5 point pour les bornes atteintes, 0,5 point pour le point intérieur ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la fonction auxiliaire, 0,5 point pour la vérification de Rolle, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 2 : Dérivabilité en un point et limite de la dérivée (4 points)

a. Pour $x \neq 0$, le taux d'accroissement en 0 vaut $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Il est majoré en valeur absolue par $|x|$, qui tend vers 0. **Donc** f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$, les théorèmes généraux donnent $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Le premier terme tend vers 0. En revanche, avec $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, on a $\cos(1/x_n) = 1$ et $\cos(1/y_n) = -1$. Ainsi $f'(x_n) \rightarrow -1$ et $f'(y_n) \rightarrow 1$: f' n'a pas de limite en 0.

Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais **n'est pas de classe** $\mathcal{C}^1$. La réciproque du théorème de la limite de la dérivée est donc fausse.

b. Pour $x \neq 0$, $\frac{x|x|-0}{x} = |x|$, qui tend vers 0. **La fonction $x \rightarrow x|x|$ est dérivable en 0, de dérivée nulle.**

c. Continuité en 0. Pour $x > 0$, $h(x) = x \cdot (x \ln x)$. Par croissances comparées, $x \ln x \rightarrow 0$, donc $h(x) \rightarrow 0 = h(0)$. Ainsi h est continue sur $[0, +\infty[$.

Limite de la dérivée. Sur $]0, +\infty[$, h est dérivable et $h'(x) = 2x \ln x + x$. Cette expression tend vers 0 quand $x \rightarrow 0^+$.

Le théorème de la limite de la dérivée s'applique : h est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, et h' a une limite finie en 0. Donc h est dérivable en 0, avec $h'(0) = 0$, et h' est continue en 0. Comme h' est aussi continue sur $]0, +\infty[$, **h est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.**

Dérivabilité de h' en 0. Pour $x > 0$, $\frac{h'(x) - h'(0)}{x} = \frac{2x \ln x + x}{x} = 2 \ln x + 1$, qui tend vers $-\infty$.
Donc h' n'est pas dérivable en 0 : h n'est pas deux fois dérivable en 0.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour $f(0)$, 0,5 point pour l'absence de limite de f , 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point ; c) 2 points : 0,5 point pour la continuité, 0,5 point pour la limite de h' , 0,5 point pour le théorème cité avec ses hypothèses, 0,5 point pour la non-dérivabilité de h' .

Erreur fréquente : dériver h en 0 par la formule $2x \ln x + x$, qui n'a pas de sens en $x = 0$.

Exercice 3 : Rolle pour les polynômes et formule de Leibniz (4 points)

a. Notons $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les racines de P . Pour $1 \leq i \leq n-1$, la fonction polynomiale P est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur l'intérieur, et $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$. Le théorème de Rolle fournit $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$.

Les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ sont deux à deux disjoints, donc les $n - 1$ réels c_i sont distincts. Or P' est non nul de degré $n - 1$, donc il a au plus $n - 1$ racines. **Ainsi P' a exactement $n - 1$ racines, toutes réelles et distinctes :** $c_1, \dots, c_{n-1}$.

- b. Appliquons la formule de Leibniz à $g = uv$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^{2x}$. On a $u'(x) = 2x$, $u''(x) = 2$, et $u^{(k)} = 0$ pour $k \geq 3$. De plus $v^{(m)}(x) = 2^m e^{2x}$. Pour $n \geq 2$:

$$g^{(n)}(x) = \binom{n}{0} x^2 2^n e^{2x} + \binom{n}{1} 2x 2^{n-1} e^{2x} + \binom{n}{2} 2 \cdot 2^{n-2} e^{2x}.$$

En factorisant par $2^{n-2} e^{2x}$:

$$g^{(n)}(x) = 2^{n-2} e^{2x} (4x^2 + 4nx + n(n-1)).$$

Vérification pour $n = 2$: la formule donne $e^{2x}(4x^2 + 8x + 2)$. Directement, $g'(x) = (2x^2 + 2x)e^{2x}$, puis $g''(x) = (4x + 2)e^{2x} + 2(2x^2 + 2x)e^{2x} = (4x^2 + 8x + 2)e^{2x}$. Les deux résultats concordent.

- c. Pour $0 \leq k \leq n$, $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$. La formule de Leibniz donne :

$$(x^{2n})^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \cdot \frac{n!}{k!} x^k = n! x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Par ailleurs, $(x^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!} x^n$. En comparant en $x = 1$, on obtient $n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}$. **Donc** $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$.

point pour l'argument de degré ; b) 1,5 point : 0,5 point pour les dérivées successives, 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour la vérification ; c) 1 point : 0,5 point pour le calcul de Leibniz, 0,5 point pour l'identification.

Exercice 4 : Accroissements finis et suite récurrente (4 points)

- a. Le cosinus est décroissant sur $[0, 1] \subset [0, \pi]$. Donc, pour $x \in [0, 1]$, $\cos 1 \leq \cos x \leq 1$. Or $1 < \frac{\pi}{2}$, donc $\cos 1 > 0$. **Ainsi** $\cos([0, 1]) \subset [0, 1]$.

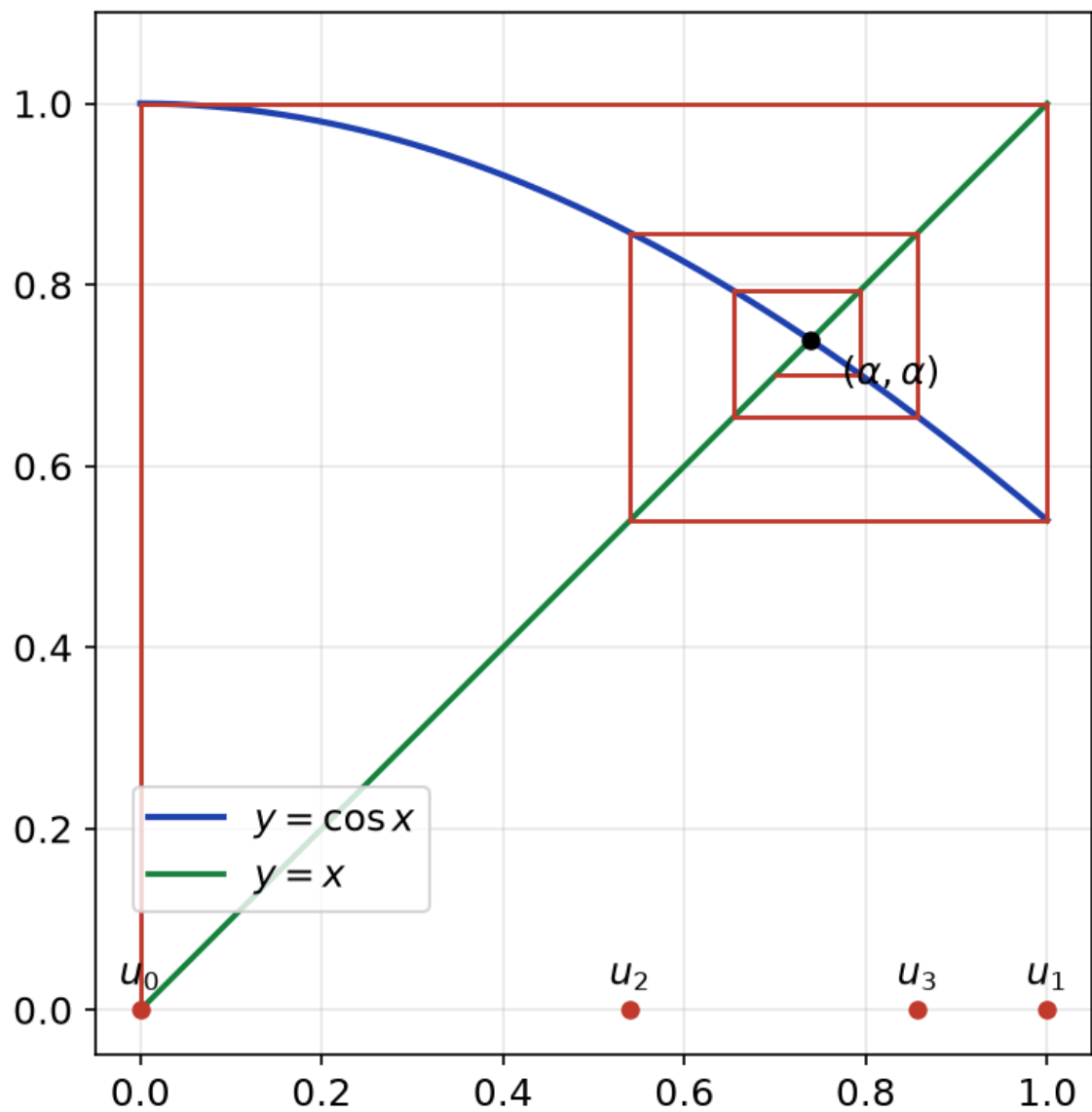
Posons $\varphi(x) = \cos x - x$. Elle est continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$, comme somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante. De plus

$\varphi(0) = 1 > 0$ et $\varphi(1) = \cos 1 - 1 < 0$. Par le théorème de la bijection continue, φ **s'annule en un unique point** $\alpha \in [0, 1]$.

- b. Le cosinus est dérivable, de dérivée $-\sin$. Sur $[0, 1]$, le sinus est croissant et positif, donc $|\sin t| \leq \sin 1$. Par l'inégalité des accroissements finis, $|\cos x - \cos y| \leq \sin(1) |x - y|$ **pour tous** $x, y \in [0, 1]$.

- c. Par stabilité, $u_n \in [0, 1]$ pour tout n . Posons $k = \sin 1$. Comme $\cos \alpha = \alpha$, on a $|u_{n+1} - \alpha| = |\cos u_n - \cos \alpha| \leq k |u_n - \alpha|$. Par récurrence, $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$. De plus $|u_0 - \alpha| \leq 1$, car u_0 et α sont dans $[0, 1]$. **Donc** $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n$.

Comme $0 \leq \sin 1 < 1$, $(\sin 1)^n \rightarrow 0$. Par encadrement, (u_n) **converge vers** α .



d. Il suffit que $0,85^n \leq 10^{-2}$, soit $n \ln(0,85) \leq -2 \ln 10$. Comme $\ln(0,85) < 0$, cela équivaut à :

$$n \geq \frac{2 \ln 10}{-\ln(0,85)} \approx \frac{4,606}{0,163} \approx 28,3.$$

Pour tout $n \geq 29$, u_n approche α à 10^{-2} près.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la stabilité, 0,5 point pour l'unicité de α ; b) 1 point : 0,5 point pour la

majoration de la dérivée, 0,5 point pour l'inégalité citée ; c) 1 point ; d) 1 point : 0,5 point pour le passage au logarithme avec changement de sens, 0,5 point pour le rang.

Exercice 5 : Problème - convexité et inégalités (5 points)

1. Pour $n = 2$, l'inégalité est la définition de la convexité. Supposons-la vraie au rang n , et prenons $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ et des poids λ_i positifs de somme 1.

Si $\lambda_{n+1} = 1$, les autres poids sont nuls et l'inégalité est une égalité. Sinon, posons

$\mu = 1 - \lambda_{n+1} > 0$ et $y = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu} x_i$. Les poids $\frac{\lambda_i}{\mu}$ sont positifs de somme 1, donc $y \in I$, car un intervalle contient les barycentres à poids positifs de ses points.

Par convexité, puis par hypothèse de récurrence :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f(\mu y + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \mu f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

L'inégalité de Jensen est donc vraie pour tout $n \geq 2$.

2. La fonction $-\ln$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée seconde $\frac{1}{x^2} > 0$. **Elle est donc convexe.**

Appliquons Jensen avec $\lambda_i = \frac{1}{n}$:

$$-\ln\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = -\ln\left((x_1 \dots x_n)^{1/n}\right).$$

Donc $\ln\left((x_1 \dots x_n)^{1/n}\right) \leq \ln\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)$. La fonction exponentielle est croissante.

Ainsi $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

3. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin'' = -\sin \leq 0$, donc le sinus y est concave. Une fonction concave dérivable est située sous ses tangentes. La tangente en 0 a pour équation $y = x$, d'où $\sin x \leq x$.

De plus, une fonction concave est au-dessus de ses cordes sur l'intervalle qu'elles joignent. La corde entre $(0, 0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$. **Donc** $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ **sur** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. D'après 2 avec $n = 3$, $(abc)^{1/3} \leq \frac{a+b+c}{3} = 1$. **Donc** $abc \leq 1$.

Ensuite, $x \rightarrow \frac{1}{x}$ a pour dérivée seconde $\frac{2}{x^3} > 0$ sur $]0, +\infty[$: elle est convexe. Jensen avec des poids $\frac{1}{3}$ donne $\frac{1}{(a+b+c)/3} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. Or le membre de gauche vaut 1 .

Donc $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$, avec égalité pour $a = b = c = 1$.

Barème : 1) 1,5 point : 0,5 point pour l'initialisation et le cas particulier, 0,5 point pour le barycentre y dans I , 0,5 point pour la double inégalité ; 2) 1,5 point : 0,5 point pour la convexité, 1 point pour la déduction ; 3) 1 point : 0,5 point par inégalité ; 4) 1 point : 0,5 point par inégalité.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : dérivation, accroissements finis et convexité

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Dérivabilité et convexité](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [dérivabilité et convexité](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).