

Corrigé du contrôle de maths sup : dénombrement et formules combinatoires

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Applications, injections et parties	4 points
Exercice 2 : Cardinal d'une réunion	4 points
Exercice 3 : Anagrammes et tirages	4 points
Exercice 4 : Formules de Pascal et de Vandermonde	3 points
Exercice 5 : Surjections d'un ensemble à $n + 1$ éléments	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Applications, injections et parties (4 points)

- a. Numérotons les éléments de $E : E = \{x_1, \dots, x_p\}$. L'application $\Phi : F^E \rightarrow F^{\mathcal{P}}$, $f \rightarrow (f(x_1), \dots, f(x_p))$, est bijective. En effet, une application est entièrement déterminée par ses valeurs, donc Φ est injective ; de plus, toute $\mathcal{P}$ -liste $(y_1, \dots, y_p)$ est l'image de l'application qui envoie x_k sur y_k , donc Φ est surjective. Par conséquent, $\text{card } F^E = \text{card } F^{\mathcal{P}}$. Or le cardinal d'un produit cartésien est le produit des cardinaux, d'où $\text{card } F^{\mathcal{P}} = n^{\mathcal{P}}$. Ainsi, $\text{card } F^E = n^{\mathcal{P}}$ (avec la convention $n^0 = 1$: lorsque $E = \emptyset$, il existe une seule application, l'application vide).
- b. Par la même bijection Φ , les injections de E dans F correspondent exactement aux $\mathcal{P}$ -listes d'éléments deux à deux distincts de F . Dénombrons ces listes par le principe multiplicatif :

on choisit y_1 parmi n éléments, puis y_2 parmi les $n - 1$ éléments différents de y_1 , et ainsi de suite jusqu'à y_p , choisi parmi $n - p + 1$ éléments. Le nombre de choix ne dépend pas des choix précédents, donc le nombre d'injections vaut

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Il y a donc $\frac{n!}{(n-p)!}$ **injections de E dans F** .

- c. À toute partie A de E , associons sa fonction indicatrice $1_A : E \rightarrow \{0, 1\}$, qui vaut 1 sur A et 0 ailleurs. L'application $A \rightarrow 1_A$ est injective, car $A = \left\{ x \in E \mid 1_A(x) = 1 \right\}$ se lit sur l'indicatrice. Elle est aussi surjective : toute application $g : E \rightarrow \{0, 1\}$ est l'indicatrice de $g^{-1}(\{1\})$. C'est donc une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\{0, 1\}^E$, et d'après la question a), $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^p$.

Barème : a) 1,5 point : 1 point pour la bijection avec les $\mathcal{P}$ -listes justifiée, 0,5 point pour la conclusion ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la correspondance avec les listes d'éléments distincts, 1 point pour le principe multiplicatif rédigé ; c) 1 point : 0,5 point pour la bijection justifiée, 0,5 point pour le cardinal.

Exercice 2 : Cardinal d'une réunion (4 points)

- a. On a $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, et cette réunion est disjointe. Donc $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card}(B \setminus A)$. De même, B est la réunion disjointe de $B \cap A$ et de $B \setminus A$, d'où $\text{card}(B \setminus A) = \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$. En reportant, on obtient $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$.

- b. Appliquons a) aux parties $A \cup B$ et C :

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A \cup B) + \text{card } C - \text{card}((A \cup B) \cap C).$$

Par distributivité, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, et l'intersection de ces deux parties est $A \cap B \cap C$. Une nouvelle application de a) donne donc

$$\text{card}((A \cup B) \cap C) = \text{card}(A \cap C) + \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap B \cap C).$$

En remplaçant aussi $\text{card}(A \cup B)$ par son expression, on obtient

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card } A + \text{card } B + \text{card } C - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).$$

c. Pour $d \in \llbracket 1, 1000 \rrbracket$, les multiples de d dans $\llbracket 1, 1000 \rrbracket$ sont $d, 2d, \dots, qd$ avec $q = \left\lfloor \frac{1000}{d} \right\rfloor$. Donc $\text{card } A_d = \left\lfloor \frac{1000}{d} \right\rfloor$. De plus, comme 2, 3 et 5 sont premiers entre eux deux à deux, un entier est divisible par 2 et par 3 si et seulement s'il est divisible par 6. Ainsi $A_2 \cap A_3 = A_6$, et de même $A_2 \cap A_5 = A_{10}$, $A_3 \cap A_5 = A_{15}$, $A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30}$. On trouve :

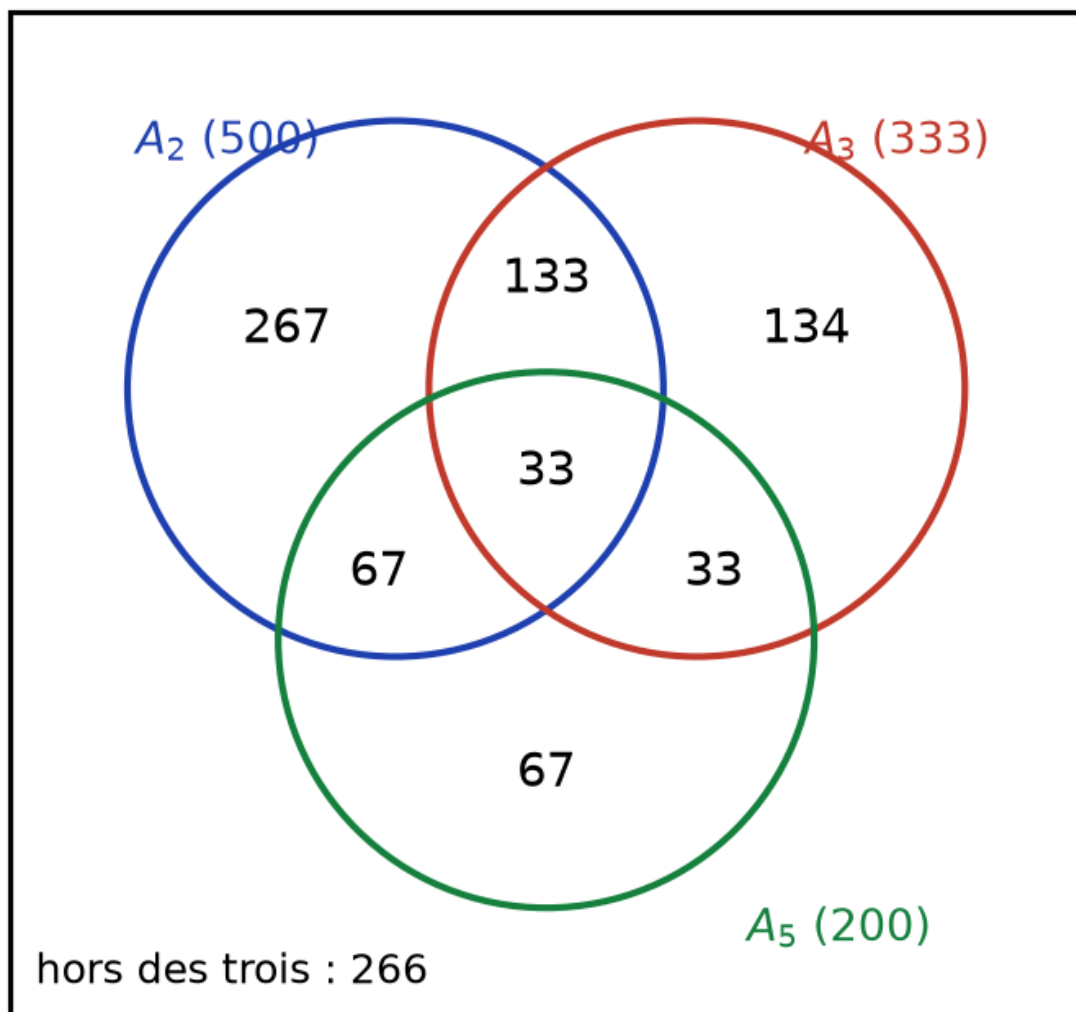
$$\text{card } A_2 = 500, \text{ card } A_3 = 333, \text{ card } A_5 = 200 ;$$

$$\text{card } A_6 = 166, \text{ card } A_{10} = 100, \text{ card } A_{15} = 66, \text{ card } A_{30} = 33 .$$

D'après b) :

$$\text{card}(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734.$$

Il y a donc **734 entiers divisibles par 2, par 3 ou par 5**, et par passage au complémentaire $1000 - 734 = 266$ **entiers divisibles par aucun des trois**. Le diagramme ci-dessous donne l'effectif de chaque zone ; leur somme redonne bien 734.



Erreur fréquente : oublier de rajouter $\text{card}(A \cap B \cap C)$, que l'on a retiré trois fois après l'avoir compté trois fois.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la réunion disjointe, 0,5 point pour le calcul de $\text{card}(B \setminus A)$; b) 1,5 point : 0,5 point pour la distributivité, 1 point pour la formule finale ; c) 1,5 point : 0,5 point pour les intersections A_6 , A_{10} , A_{15} , A_{30} justifiées, 0,5 point pour les sept cardinaux, 0,5 point pour 734 et 266.

Exercice 3 : Anagrammes et tirages (4 points)

- a. Le mot CONCOURS compte 8 lettres : deux C, deux O, puis N, U, R et S. Une anagramme est déterminée par le choix des positions de chaque lettre. On choisit d'abord les 2 positions des C parmi 8, soit $\binom{8}{2} = 28$ choix. Ensuite, on choisit les 2 positions des O parmi les 6 restantes, soit $\binom{6}{2} = 15$ choix. Enfin, on place N, U, R et S, qui sont distinctes, sur les 4 positions restantes, soit $4! = 24$ façons. Par le principe multiplicatif, le nombre d'anagrammes est $28 \times 15 \times 24 = 10\,080$. Le mot CONCOURS possède donc **10 080 anagrammes**, ce que l'on retrouve par $\frac{8!}{2! 2!} = \frac{40\,320}{4}$.
- b. Collons les deux C en un seul bloc « CC ». Les anagrammes cherchées sont alors en bijection avec les arrangements de 7 objets : le bloc, deux O, N, U, R et S. On choisit la position du bloc parmi 7, puis les 2 positions des O parmi les 6 restantes, puis on place les 4 lettres distinctes : $7 \times \binom{6}{2} \times 4! = 7 \times 15 \times 24 = 2\,520$. Il y a donc **2 520 anagrammes où les deux C sont côte à côte**.
- c. Avec remise, un résultat est une 3-liste d'éléments de $\llbracket 1, 10 \rrbracket$: il y en a $10^3 = 1\,000$. Sans remise, un résultat est une 3-liste d'éléments distincts, c'est-à-dire un arrangement : il y en a $10 \times 9 \times 8 = 720$. Enfin, lors d'un tirage simultané, un résultat est une partie à 3 éléments : il y en a $\binom{10}{3} = 120$.
- d. Une partie à 3 éléments de plus grand élément 7 s'écrit $\{7\} \cup B$, où B est une partie à 2 éléments de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$, et cette écriture est unique. Il y a donc $\binom{6}{2} = 15$ **tirages** de plus grand numéro 7.

Barème : a) 1,5 point : 1 point pour le choix successif des positions, 0,5 point pour 10 080 ; b) 1 point : 0,5 point pour le bloc, 0,5 point pour 2 520 ; c) 1 point : 0,5 point pour les trois modèles (listes, arrangements, parties), 0,5 point pour les trois nombres ; d) 0,5 point pour la bijection et 15.

Exercice 4 : Formules de Pascal et de Vandermonde (3 points)

- a. Notons $\mathcal{P}_{p+1}(E)$ l'ensemble des parties de E à $p+1$ éléments. On le partage en deux ensembles disjoints : $\mathcal{A}$, formé des parties qui contiennent a , et $\mathcal{B}$, formé des autres. D'une part, l'application $X \rightarrow X \setminus \{a\}$ est une bijection de $\mathcal{A}$ sur l'ensemble des parties à p éléments de $E \setminus \{a\}$; sa réciproque est $Y \rightarrow Y \cup \{a\}$. Comme $E \setminus \{a\}$ a n éléments, $\text{card } \mathcal{A} = \binom{n}{p}$. D'autre part, $\mathcal{B}$ est exactement l'ensemble des parties à $p+1$ éléments de $E \setminus \{a\}$, donc $\text{card } \mathcal{B} = \binom{n}{p+1}$. Par le principe additif, on conclut :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$
- b. Soit E et F deux ensembles disjoints de cardinaux n et m ; alors $E \cup F$ a $n+m$ éléments. Pour $k \in [0, p]$, notons $\mathcal{C}_k$ l'ensemble des parties X de $E \cup F$ à p éléments telles que $\text{card}(X \cap E) = k$. Les $\mathcal{C}_k$ sont deux à deux disjointes et recouvrent l'ensemble des parties à p éléments. De plus, l'application $X \rightarrow (X \cap E, X \cap F)$ est une bijection de $\mathcal{C}_k$ sur l'ensemble des couples formés d'une partie à k éléments de E et d'une partie à $p-k$ éléments de F ; sa réciproque est $(Y, Z) \rightarrow Y \cup Z$. Donc

$$\text{card } \mathcal{C}_k = \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} \quad (\text{ce produit est nul si } k > n \text{ ou } p-k > m).$$
En sommant,
$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$
- c. Prenons $m = n$ et $p = n$ dans la formule de Vandermonde. Par symétrie,

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}, \text{ d'où } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour le partage, 0,5 point pour la bijection sur $\mathcal{A}$, 0,5 point pour $\mathcal{B}$ et la conclusion ; b) 1 point : 0,5 point pour la partition selon $\text{card}(X \cap E)$, 0,5 point pour la bijection et le cardinal ; c) 0,5 point.

Exercice 5 : Surjections d'un ensemble à $n+1$ éléments (5 points)

- a. Les ensembles $f^{-1}(\{y\})$, pour $y \in F$, sont deux à deux disjoints et leur réunion est E .
Donc

$$\sum_{y \in F} \text{card } f^{-1}(\{y\}) = n+1.$$

Comme f est surjective, chacun de ces n entiers vaut au moins 1. Écrivons

$\text{card } f^{-1}(\{y\}) = 1 + e_y$ avec $e_y \geq 0$. Alors $\sum_{y \in F} e_y = 1$, donc un seul des e_y vaut 1 et tous les autres sont nuls. Ainsi, **un unique élément y_0 de F a exactement deux antécédents, et les autres en ont exactement un.**

- b. Soit f une surjection et $\{i, j\} = f^{-1}(\{y_0\})$ la paire donnée par a). Notons $E_{i,j}$ l'ensemble à n éléments obtenu à partir de E en remplaçant i et j par le seul élément $\{i, j\}$: ses éléments sont la paire $\{i, j\}$ et les $n - 1$ singletons $\{x\}$, $x \notin \{i, j\}$. L'application $\sigma : E_{i,j} \rightarrow F$, qui envoie chaque bloc sur la valeur commune de f sur ce bloc, est bien définie. Elle est surjective car f l'est, donc bijective puisque les deux ensembles ont n éléments. On associe ainsi à f le couple $(\{i, j\}, \sigma)$.

Réciproquement, un couple $(\{i, j\}, \sigma)$ définit une application f en posant $f(x) = \sigma(\text{bloc contenant } x)$. Elle est surjective, et la paire des deux antécédents de même image est exactement $\{i, j\}$. Les deux constructions sont réciproques l'une de l'autre, ce qui donne la bijection annoncée.

Il y a $\binom{n+1}{2}$ paires dans E et, pour chacune, $n!$ bijections de $E_{i,j}$ sur F . Par conséquent,

$$s_n = \binom{n+1}{2} n! = \frac{(n+1)n}{2} n! = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

On obtient bien $s_n = \frac{n(n+1)!}{2}$.

- c. Pour $n = 2$, il y a $2^3 = 8$ applications de $[[1, 3]]$ dans $[[1, 2]]$. Les seules qui ne sont pas surjectives sont les deux applications constantes. Il reste donc $8 - 2 = 6$ surjections. La formule donne $s_2 = \frac{2 \times 3!}{2} = 6$: **le résultat est vérifié.**
- d. Une répartition est une surjection de l'ensemble des 5 étudiants sur l'ensemble des 4 salles, d'où, avec $n = 4$: $s_4 = \frac{4 \times 5!}{2} = \frac{4 \times 120}{2} = 240$. Second raisonnement : on choisit d'abord les deux étudiants qui partagent une salle, soit $\binom{5}{2} = 10$ choix ; ensuite, on attribue une salle différente à chacun des 4 groupes, soit $4! = 24$ façons. On retrouve $10 \times 24 = 240$. Il existe donc **240 répartitions.**

Erreur fréquente : placer d'abord un étudiant dans chaque salle ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ façons), puis le cinquième dans l'une des 4 salles, ce qui donne 480 : chaque répartition est alors comptée deux fois, selon lequel des deux étudiants du binôme a été placé en premier.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la partition de E en fibres, 1 point pour l'argument de somme ; b) 2 points : 1 point pour la construction de la bijection et de sa réciproque, 0,5 point pour le dénombrement des couples, 0,5 point pour la formule ; c) 0,5 point ; d) 1 point : 0,5 point pour 240, 0,5 point pour le second raisonnement.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : dénombrement et formules combinatoires

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Dénombrement](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [dénombrement](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).