

Corrigé du contrôle de maths sup : complexes, racines n-ièmes et géométrie

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Racines n-ièmes de l'unité	3 points
Exercice 2 : Angle moitié et linéarisation	5 points
Exercice 3 : Équations dans $\mathbb{C}$	5 points
Exercice 4 : Géométrie dans le plan complexe	7 points
Total	20 points

Exercice 1 : Racines n-ièmes de l'unité (3 points)

- a. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors $|z|^n = |z^n| = 1$, et comme $|z| \geq 0$, on a $|z| = 1$. On peut donc écrire $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Ensuite, $z^n = e^{in\theta} = 1$ équivaut à $n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, $\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = e^{2ik\pi} = 1$.

Par division euclidienne, tout $k \in \mathbb{Z}$ s'écrit $k = qn + r$ avec $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Alors $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{2iq\pi} e^{\frac{2ir\pi}{n}} = e^{\frac{2ir\pi}{n}}$: on peut se limiter à $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Enfin, si $0 \leq k, k' \leq n-1$ et $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$, alors $\frac{k-k'}{n} \in \mathbb{Z}$. Or $|k-k'| < n$, donc $k = k'$. **Les n racines sont distinctes, et $\mathbb{U}_n$ a exactement n éléments.**

- b. Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Comme $n \geq 2$, on a $0 < \frac{2\pi}{n} < 2\pi$, donc $\omega \neq 1$. Par la formule de la

somme géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0.$$

La somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle.

Barème : a) 2 points : 0,5 pour $|z| = 1$, 0,5 pour $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ et la réciproque, 0,5 pour la réduction à $[[0, n-1]]$, 0,5 pour le caractère distinct ; b) 1 point : 0,5 pour $\omega \neq 1$, 0,5 pour le calcul.

Exercice 2 : Angle moitié et linéarisation (5 points)

a. On factorise par $e^{\frac{i\theta}{2}}$:

$$1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} \right) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos \frac{\theta}{2} > 0$. **Le module vaut $2 \cos \frac{\theta}{2}$ et $\frac{\theta}{2}$ est un argument.**

De même, $1 - e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} \right) = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\theta}{2}}$. Or $-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$, donc

$$1 - e^{i\theta} = 2 \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\theta - \pi)}{2}}.$$

Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, on a $\sin \frac{\theta}{2} > 0$. **Le module vaut $2 \sin \frac{\theta}{2}$ et $\frac{\theta - \pi}{2}$ est un argument.**

b. Par la formule d'Euler et la formule du binôme,

$$\cos^4 t = \frac{1}{16} (e^{it} + e^{-it})^4 = \frac{1}{16} (e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}).$$

En regroupant les termes conjugués, on obtient $\frac{1}{16} (2 \cos 4t + 8 \cos 2t + 6)$. **Donc**

$$\cos^4 t = \frac{1}{8}(\cos 4t + 4\cos 2t + 3).$$

- c. Comme $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{it} \neq 1$, et la somme géométrique donne $\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}$. La question a, appliquée au numérateur et au dénominateur sous la forme $1 - e^{i\alpha} = -2i\sin\frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}$, donne

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} e^{i\frac{nt}{2}}.$$

Le quotient des sinus est réel. En prenant la partie réelle, $\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{\sin\frac{(n+1)t}{2} \cos\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$

- d. Par la formule de Moivre, $\cos(3t) = \operatorname{Re}((\cos t + i\sin t)^3) = \cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t$. En remplaçant $\sin^2 t$ par $1 - \cos^2 t$, **on obtient** $\cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t$.

Erreur fréquente : annoncer $2\cos\frac{\theta}{2}$ comme module sans vérifier son signe. Hors de $]-\pi, \pi[$, ce réel peut être négatif et l'argument change de π .

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour chaque factorisation, 0,5 pour les signes justifiés ; b) 1 point : 0,5 pour le développement, 0,5 pour le résultat ; c) 1,5 point : 0,5 pour la somme géométrique, 0,5 pour l'angle moitié, 0,5 pour la partie réelle ; d) 1 point.

Exercice 3 : Équations dans C (5 points)

- a. Cherchons $\delta = x + iy$ avec x, y réels tel que $\delta^2 = 3 - 4i$. L'égalité des parties réelles, des parties imaginaires et des modules donne

$$x^2 - y^2 = 3, \quad 2xy = -4, \quad x^2 + y^2 = |3 - 4i| = 5.$$

On en tire $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$, et $xy < 0$ impose des signes contraires. **Les racines carrées de $3 - 4i$ sont $2 - i$ et $-2 + i$.**

- b. Le discriminant vaut $\Delta = (-3i)^2 - 4(-3 + i) = -9 + 12 - 4i = 3 - 4i$. D'après la question a, $\delta = 2 - i$ en est une racine carrée. Les solutions sont donc

$$z_1 = \frac{3i + (2 - i)}{2} = 1 + i \text{ et } z_2 = \frac{3i - (2 - i)}{2} = -1 + 2i.$$

Vérification : $z_1 + z_2 = 3i$ et $z_1 z_2 = (1+i)(-1+2i) = -3 + i$. **L'ensemble des solutions est** $\left\{ \begin{matrix} 1+i, \\ -1+2i \end{matrix} \right\}$.

- c. On a $8i = 8e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $8 = 2^3$. Une solution particulière est $z_0 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$; les solutions sont les $z_0 \omega$ avec $\omega \in \mathbb{U}_3$, soit $2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ pour $k \in \{0,1,2\}$. **Les solutions sont**
 $2e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$, $2e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$ et $2e^{\frac{3i\pi}{2}} = -2i$.

- d. On a $1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$. Écrivons $z = x + iy$: $e^z = e^x e^{iy}$. Par unicité du module et de l'argument modulo 2π , l'équation équivaut à $e^x = 2$ et $y \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$. **Les solutions sont les**
 $\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour le système avec l'équation des modules, 0,5 pour x^2 et y^2 , 0,5 pour les signes ; b) 1,5 point : 0,5 pour Δ , 1 pour les deux solutions ; c) 1 point : 0,5 pour la méthode, 0,5 pour les trois solutions sous les deux formes ; d) 1 point : 0,5 pour la forme exponentielle, 0,5 pour l'ensemble des solutions.

Exercice 4 : Géométrie dans le plan complexe (7 points)

- a. On a $c - a = 6 + 2i = 2(3 + i)$ et $b - a = 3 + i$, donc $\frac{c-a}{b-a} = 2$. Ce quotient est réel, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. **Les points A, B et C sont alignés** (et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$: B est le milieu de $[AC]$).

- b. On calcule $\frac{d-a}{b-a} = \frac{1-3i}{3+i} = \frac{(1-3i)(3-i)}{10} = \frac{3-i-9i-3}{10} = -i$.

Ainsi $\frac{AD}{AB} = |-i| = 1$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. **Le triangle ABD est**

rectangle isocèle en A .

- c. Un point fixe d'affixe ω vérifie $\omega = (1+i)\omega + 1$, soit $-i\omega = 1$, donc $\omega = i$. Il est unique puisque $1+i \neq 1$. En soustrayant $\omega = (1+i)\omega + 1$ à $z' = (1+i)z + 1$, on obtient

$$z' - i = (1+i)(z - i) = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} (z - i).$$

L'application s est la similitude directe de centre $O(i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

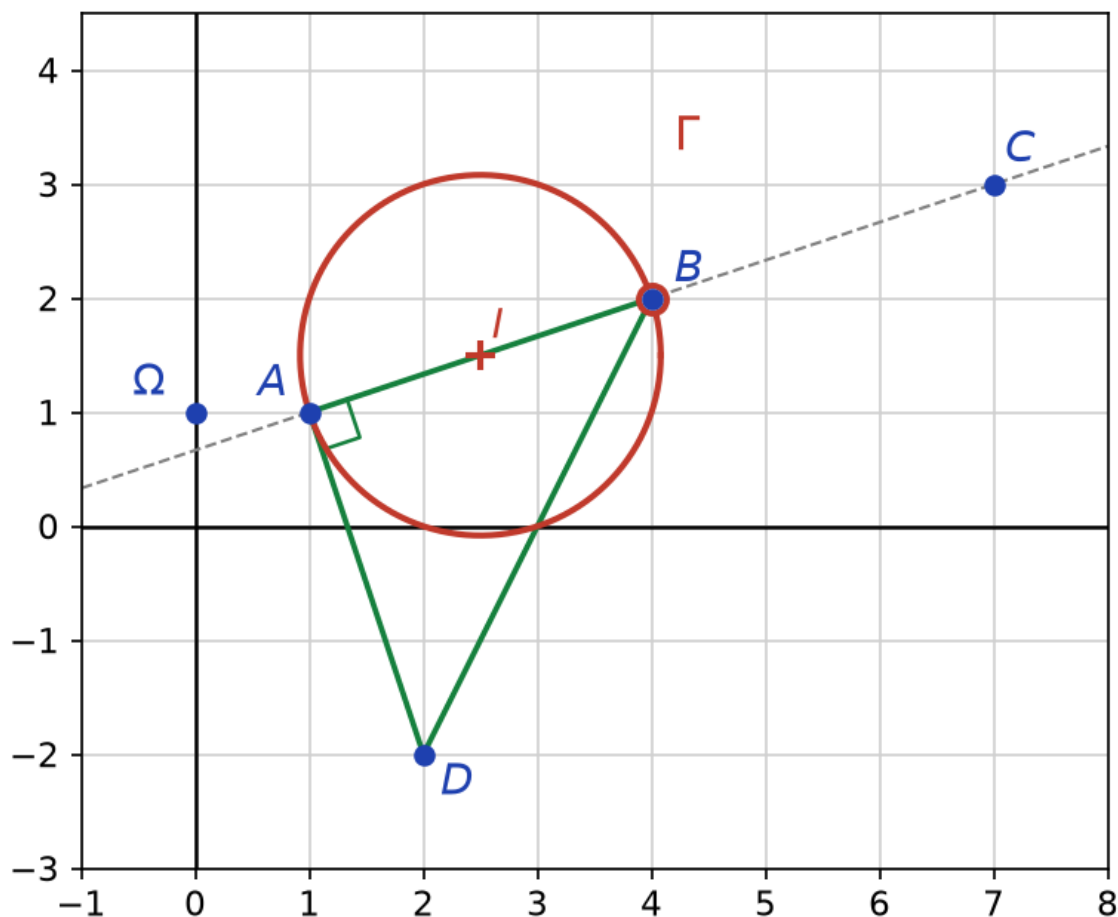
- d. D'après la question b, $d - a = -i(b - a)$. La rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ s'écrit $z' - a = -i(z - a)$, et elle envoie bien B sur D . Comme $a(1+i) = (1+i)^2 = 2i$, on obtient $z' = -iz + 2i$. Vérification : $-i(4 + 2i) + 2i = 2 - 2i = d$. **La rotation cherchée est $r : z \rightarrow -iz + 2i$.**

- e. Posons $z = x + iy$ avec $z \neq b$. Le quotient $\frac{z-a}{z-b} = \frac{(z-a)\overline{(z-b)}}{|z-b|^2}$ est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}((z-a)\overline{(z-b)}) = 0$, c'est-à-dire

$$(x-1)(x-4) + (y-1)(y-2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + y^2 - 3y + 6 = 0.$$

En complétant les carrés, on obtient $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{9}{4} - 6 = \frac{10}{4}$.

L'ensemble Γ est le cercle de centre $I\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$, privé du point B . C'est le cercle de diamètre $[AB]$: I est le milieu de $[AB]$ et $AB = |3 + i| = \sqrt{10}$. Le point A en fait partie, car 0 est imaginaire pur. Géométriquement, pour $M \neq A, B$, la condition exprime que l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.



Erreur fréquente : oublier d'exclure B , où le quotient n'est pas défini, ou exclure A à tort.

Barème : a) 1 point : 0,5 pour le quotient, 0,5 pour la conclusion justifiée ; b) 1,5 point : 0,5 pour le calcul, 1 pour la nature du triangle (module et argument) ; c) 1,5 point : 0,5 pour le point fixe, 0,5 pour la forme $z' - i = (1+i)(z-i)$, 0,5 pour le rapport et l'angle ; d) 1 point : 0,5 pour la forme, 0,5 pour l'écriture développée ; e) 2 points : 0,5 pour la traduction par la partie réelle, 0,5 pour l'équation cartésienne, 0,5 pour le centre et le rayon, 0,5 pour les points exclus ou conservés.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : complexes, racines n-ièmes et géométrie

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Nombres complexes](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [nombres complexes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).