

Corrigé du contrôle de maths sup : calcul matriciel, puissances et inverse

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours	3 points
Exercice 2 : Produits, transposées et symétries	3,5 points
Exercice 3 : Puissances par la formule du binôme	4 points
Exercice 4 : Inverse par la méthode de Gauss-Jordan	3 points
Exercice 5 : Système linéaire à paramètre	3 points
Exercice 6 : Problème : commutant d'une matrice nilpotente	3,5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

- a. Formule du binôme : si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **qui commutent** ($AB = BA$), alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Avec les matrices proposées, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$ et

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $AB \neq BA$. De plus $A^2 = A$ et $B^2 = 0$. En développant sans rien permuter,

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
 En revanche

$$A^2 + 2AB + B^2 = A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux résultats diffèrent : sans commutation, la formule du binôme est fausse.

b. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ triangulaires supérieures : $a_{ik} = 0$ si $i > k$ et

$$b_{kj} = 0 \text{ si } k > j. \text{ Pour tous } i, j, \text{ on a } (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}. \text{ Un terme } a_{ik} b_{kj}$$

ne peut être non nul que si $i \leq k$ et $k \leq j$. Ainsi, si $i > j$, aucun indice k ne convient et

$(AB)_{ij} = 0$: **AB est triangulaire supérieure.** Pour $i = j$, la seule valeur possible est $k = i$, d'où $(AB)_{ii} = a_{ii} b_{ii}$: les coefficients diagonaux se multiplient terme à terme.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour l'énoncé avec l'hypothèse $AB = BA$, 1 pour le contre-exemple calculé ; b) 1,5 point : 1 pour la nullité des coefficients sous la diagonale, 0,5 pour les coefficients diagonaux.

Exercice 2 : Produits, transposées et symétries (3,5 points)

a. A est de taille 2×3 et B de taille 3×2 : AB est carrée d'ordre 2 et BA carrée d'ordre 3. Ligne par colonne, on obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 1+4+0 & 0+2+0 \\ 0+2+1 & 0+1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, la deuxième ligne de BA vaut $2 \times (1, 2, 0) + 1 \times (0, 1, -1) = (2, 5, -1)$. **Les deux produits n'ont même pas la même taille.**

b. D'après les règles de transposition, $(M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M$: **$M^T M$ est symétrique.** Son coefficient diagonal d'indice (j, j) vaut $\sum_{i=1}^n m_{ij}^2$. Si $M^T M = 0$, chacune de ces sommes de carrés de réels est nulle, donc tous les m_{ij} sont nuls : **$M = 0$.**

c. On pose $S = \frac{1}{2}(C + C^T)$ et $K = \frac{1}{2}(C - C^T)$. Alors $S^T = S$, $K^T = -K$ et

$S + K = C$. Avec $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérification : $S + K = C$. **Cette décomposition est de plus unique** (si $C = S' + K'$, en transposant on retrouve $S' = S$).

- d. Si $K^T = -K$, alors $(K^2)^T = (K^T)^2 = (-K)^2 = K^2$. **Donc K^2 est symétrique.**

Barème : a) 1 point (0,5 par produit) ; b) 1 point : 0,5 pour la symétrie, 0,5 pour l'argument de somme de carrés ; c) 1 point : 0,5 pour les formules de S et K , 0,5 pour les matrices ; d) 0,5 point.

Exercice 3 : Puissances par la formule du binôme (4 points)

- a. $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. Ainsi $N^k = 0$ pour tout $k \geq 3$.

- b. On a $A = 2I_3 + N$. La matrice $2I_3$ commute avec toute matrice, en particulier avec N . La formule du binôme s'applique donc. Comme $N^k = 0$ pour $k \geq 3$, pour tout $n \geq 0$:

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k = 2^n I_3 + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2.$$

Pour $n = 0$ ou $n = 1$, les coefficients binomiaux $\binom{n}{1}$ ou $\binom{n}{2}$ absents sont nuls, et les expressions $n 2^{n-1}$ et $n(n-1)2^{n-3}$ le sont aussi : la formule reste valable. Finalement,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} & n(n-1) 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Contrôle pour $n = 2$: $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, ce que confirme le calcul direct. **La formule est établie pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

c. Comme $2I_3$ et N commutent et $N^3 = 0$:

$$(2I_3 + N)\left(\frac{1}{2}I_3 - \frac{1}{4}N + \frac{1}{8}N^2\right) = I_3 - \frac{1}{2}N + \frac{1}{4}N^2 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{4}N^2 + \frac{1}{8}N^3 = I_3.$$

Une matrice carrée inverse à droite est inversible, donc **A est inversible et**

$A^{-1} = \frac{1}{2}I_3 - \frac{1}{4}N + \frac{1}{8}N^2$. Pour $n = -1$, la formule de b) donne les coefficients $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $(-1) \times 2^{-2} = -\frac{1}{4}$ et $\frac{(-1)(-2)}{2} \times 2^{-3} = \frac{1}{8}$: **elle reste vraie pour $n = -1$.**

d. $D - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $(D - 2I_2)^2 = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = 0$. Comme $2I_2$ commute avec $D - 2I_2$, le binôme donne $D^n = 2^n I_2 + n 2^{n-1}(D - 2I_2)$, soit

$$D^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -n \\ -n & 2+n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$ on retrouve bien D .

Erreur fréquente : appliquer le binôme sans mentionner que les deux matrices commutent ; c'est justement l'hypothèse que le correcteur attend.

Barème : a) 0,5 point ; b) 2 points : 0,5 pour la commutation, 1 pour la somme réduite à trois termes, 0,5 pour la matrice explicite ; c) 1 point : 0,5 pour le produit égal à I_3 , 0,5 pour la vérification en $n = -1$; d) 0,5 point.

Exercice 4 : Inverse par la méthode de Gauss-Jordan (3 points)

a. On applique les mêmes opérations sur les lignes à P et à I_3 , écrites côte à côte :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Les trois pivots valent 1, donc P est inversible. Ensuite, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérification : la première ligne de P multipliée par les colonnes de P^{-1} donne $6 - 6 + 1 = 1$, $-3 + 4 - 1 = 0$ et $1 - 2 + 1 = 0$; les autres lignes se vérifient de même.

b. Le système s'écrit $PX = Y$ avec $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Comme P est inversible, il a une unique solution $X = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} 6+0+2 \\ -3+0-2 \\ 1+0+2 \end{pmatrix}$. **La solution est** $(x, y, z) = (8, -5, 3)$.
Contrôle : $8 - 10 + 3 = 1$, $16 - 25 + 9 = 0$ et $8 - 15 + 9 = 2$.

Barème : a) 2 points : 1 pour la descente (pivots non nuls), 1 pour la remontée et la matrice inverse ; b) 1 point : 0,5 pour l'écriture $X = P^{-1}Y$, 0,5 pour la solution.

Exercice 5 : Système linéaire à paramètre (3 points)

- a. On prend x comme pivot dans la première équation. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$ donnent $(m-1)y + (1-m)z = m-1$ et $(1-m)y + (1-m^2)z = m^2 - m$. Puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ élimine y : $(2-m-m^2)z = m^2 - 1$. Or $2-m-m^2 = -(m-1)(m+2)$. Ces opérations sont réversibles, donc (S_m) équivaut au système triangulaire :

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ (m-1)y + (1-m)z = m-1 \\ -(m-1)(m+2)z = (m-1)(m+1) \end{cases}$$

- b. Si $m \notin \{1, -2\}$, les coefficients diagonaux 1 , $m-1$ et $-(m-1)(m+2)$ sont non nuls : le système est de Cramer et admet une unique solution. La dernière ligne donne $z = -\frac{m+1}{m+2}$. En divisant la deuxième par $m-1$, on obtient $y - z = 1$, donc $y = \frac{1}{m+2}$. Enfin

$$x = 1 - y - mz = \frac{m+2-1+m^2+m}{m+2}. \text{ L'unique solution est }$$

$$\left(\frac{(m+1)^2}{m+2}, \frac{1}{m+2}, -\frac{m+1}{m+2} \right). \text{ Contrôle dans la troisième équation : }$$

$$\frac{m(m+1)^2 + 1 - (m+1)}{m+2} = \frac{m(m^2 + 2m)}{m+2} = m^2.$$

- c. Pour $m = 1$, les trois équations s'écrivent $x + y + z = 1$. **L'ensemble des solutions est le plan** $\{(1-y-z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$. Pour $m = -2$, la dernière ligne devient $0 \times z = (-3) \times (-1) = 3$, ce qui est impossible. **Le système (S_{-2}) n'a aucune solution.**

Barème : a) 1 point : 0,5 pour les opérations, 0,5 pour la factorisation $-(m-1)(m+2)$; b) 1 point : 0,5 pour l'argument d'unicité, 0,5 pour la solution ; c) 1 point : 0,5 par cas.

Exercice 6 : Problème : commutant d'une matrice nilpotente (3,5 points)

- a. $AI_n = I_n A$ et $AA = AA$, donc I_n et A appartiennent à $\mathcal{C}(A)$. Si M et M' commutent avec A et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
 $A(M + \lambda M') = MA + \lambda M'A = (M + \lambda M')A$. De plus, par associativité,
 $A(MM') = (MA)M' = M(AM') = (MM')A$. **$\mathcal{C}(A)$ est donc stable par somme, par multiplication par un scalaire et par produit.** En particulier, il contient tout polynôme en A .
- b. Multiplier à gauche par J remonte les lignes, et multiplier à droite par J décale les colonnes vers la droite :

$$JM = \begin{pmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } MJ = \begin{pmatrix} 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & m_{21} & m_{22} \\ 0 & m_{31} & m_{32} \end{pmatrix}.$$

L'égalité $JM = MJ$ équivaut, coefficient par coefficient, à $m_{21} = m_{31} = m_{32} = 0$, $m_{11} = m_{22} = m_{33}$ et $m_{12} = m_{23}$. En notant $a = m_{11}$, $b = m_{12}$ et $c = m_{13}$, cela s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_3 + bJ + cJ^2,$$

car J^2 n'a qu'un coefficient non nul, égal à 1, en position $(1, 3)$. Réciproquement, une telle matrice commute avec J d'après a). **Ainsi** $\mathcal{C}(J) = \{aI_3 + bJ + cJ^2, a, b, c \in \mathbb{K}\}$.

- c. La matrice de l'exercice 3 vérifie $A = 2I_3 + J$ (on avait $N = J$). Pour toute M ,
 $AM - MA = 2M + JM - 2M - MJ = JM - MJ$. **Donc** $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(J)$: **ce sont les matrices** $aI_3 + bJ + cJ^2$.
- d. Supposons $M^2 = J$. Alors $MJ = M^3 = JM$, donc $M \in \mathcal{C}(J)$ et
 $M = aI_3 + bJ + cJ^2$. Comme $J^3 = 0$, on calcule
 $M^2 = a^2 I_3 + 2abJ + (b^2 + 2ac)J^2$. Les matrices I_3 , J et J^2 ont leurs coefficients non nuls à des places disjointes. L'égalité $M^2 = J$ impose donc $a^2 = 0$ et $2ab = 1$. Or $a = 0$ donne $2ab = 0$, c'est contradictoire. **Aucune matrice de** $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ **n'a pour carré** J .

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 0,5 pour les produits JM et MJ , 0,5 pour les relations, 0,5 pour la conclusion avec la réciproque ; c) 0,5 point ; d) 1 point : 0,5 pour l'appartenance au commutant, 0,5 pour la contradiction.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : calcul matriciel, puissances et inverse

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Calcul matriciel » en maths sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [calcul matriciel](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).