Corrigé du contrôle de maths sup : borne supérieure et convergence des suites

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Borne supérieure et densité de Q	4 points
Exercice 2 : Calculs de bornes supérieures et inférieures	3 points
Exercice 3 : Limites rédigées avec epsilon	3,5 points
Exercice 4 : Suites adjacentes et irrationalité de e	4 points
Exercice 5 : Problème – Bolzano-Weierstrass et lemme de Cesàro	5,5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Borne supérieure et densité de Q (4 points)

a. **Propriété de la borne supérieure :** toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit majorant.

b. Soit A non vide et majorée, et M un majorant de A.

Sens direct. Supposons $M = \sup A$ et fixons $\varepsilon > 0$. Le réel $M - \varepsilon$ est strictement inférieur à M. Or M est le plus petit des majorants, donc $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A. Par conséquent, il existe $a \in A$ tel que $a > M - \varepsilon$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Réciproque. Supposons la propriété vraie. Soit M' un majorant de A et supposons par l'absurde $M' < M$. Posons $\varepsilon = M - M' > 0$. Il existe alors $a \in A$ tel que $a > M - \varepsilon = M'$, ce qui contredit le fait que M' majore A. Donc $M \leq M'$ pour tout majorant M'.

Ainsi M est le plus petit majorant : $M = \sup A$.

c. Soient $x < y$. Comme $y - x > 0$, la propriété d'Archimède fournit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(y-x) > 1$, soit $ny > nx + 1$. Posons $p = \lfloor nx \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière, $p - 1 \leq nx < p$. On en déduit :

$$nx < p \leq nx + 1 < ny.$$

En divisant par $n > 0$, on obtient $x < \frac{p}{n} < y$. **Le rationnel $r = \frac{p}{n}$ convient : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.**

Barème : a) 1 point (non vide et majorée exigés) ; b) 1,5 point : 0,75 point par sens ; c) 1,5 point : 0,5 point pour Archimède, 0,5 point pour le choix de p, 0,5 point pour l'encadrement final.

Exercice 2 : Calculs de bornes supérieures et inférieures (3 points)

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Cette quantité est positive et strictement inférieure à 1.

Pour $n = 0$, on obtient $0 \in A$. Donc 0 est le plus petit élément : $\inf A = \min A = 0$.

Ensuite, 1 majore A. Soit $\varepsilon > 0$: il existe n tel que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, donc $\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$. D'après la caractérisation de l'exercice 1, $\sup A = 1$**, et ce n'est pas un maximum** car

$1 \notin A$.

b. Pour $p, q \geq 1$, on a $0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + 1 = 2$. De plus, 2 est atteint pour $p = q = 1$. Donc $\sup B = \max B = 2$.

Ensuite, 0 minore B. En prenant $p = q = n$, on obtient $\frac{2}{n} \in B$, et $\frac{2}{n} \to 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un élément de B inférieur à ε. Ainsi $\inf B = 0$**, qui n'est pas un minimum** car tous les éléments de B sont strictement positifs.

c. La partie $A + B$ est non vide. Pour $a \in A$ et $b \in B$, on a $a + b \leq \sup A + \sup B$. Donc $A + B$ est majorée par $S = \sup A + \sup B$ et admet une borne supérieure.

Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation, il existe $a \in A$ avec $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$, et $b \in B$ avec $b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $a + b \in A + B$ et $a + b > S - \varepsilon$.

Par la caractérisation de l'exercice 1 b, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la borne inférieure, 0,5 point pour la borne supérieure non atteinte ; b) 1 point, même répartition ; c) 1 point : 0,25 point pour l'existence, 0,25 point pour le majorant, 0,5 point pour l'argument avec epsilon sur deux.

Erreur fréquente : affirmer que $\sup A = 1$ parce que « la suite tend vers 1 » sans vérifier que 1 est un majorant.

Exercice 3 : Limites rédigées avec epsilon (3,5 points)

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| u_n - 2 \right| = \left| \frac{2n + 1 - 2n - 6}{n+3} \right| = \frac{5}{n+3}.$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \left\lfloor \frac{5}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, de sorte que $N > \frac{5}{\varepsilon}$. Pour $n \geq N$, on a $n+3 > n \geq N > \frac{5}{\varepsilon}$, donc $\frac{5}{n+3} < \varepsilon$.

Nous avons montré : $\begin{array}{l} \forall\, \varepsilon > 0, \\ \exists\, N \in \mathbb{N}, \\ \forall\, n \geq N, \\ |u_n - 2| < \varepsilon \end{array}$. **Donc** (u_n) **converge vers** 2**.**

b. Appliquons la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$. Il existe N tel que, pour $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$. En particulier $u_n > \ell - \frac{\ell}{2}$. **Donc** $u_n > \frac{\ell}{2}$ **pour tout** $n \geq N$**.**

c. Considérons les suites extraites (v_{6k}) et (v_{6k+3}). Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$v_{6k} = \cos(2k\pi) = 1 \text{ et } v_{6k+3} = \cos(2k\pi + \pi) = -1.$$

Supposons que (v_n) converge vers L. Alors toute suite extraite converge aussi vers L. On aurait donc $L = 1$ et $L = -1$, ce qui est absurde. **La suite** (v_n) **diverge.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour le calcul de la distance, 0,5 point pour le choix de N, 0,5 point pour la conclusion avec quantificateurs ; b) 0,5 point ; c) 1,5 point : 0,5 point par suite extraite, 0,5 point pour le théorème des suites extraites.

Exercice 4 : Suites adjacentes et irrationalité de e (4 points)

a. Pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. **La suite** (u_n) **est strictement croissante.**

b. Pour $n \geq 1$, on calcule :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Or $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$, donc $\frac{1}{n \cdot n!} = \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$. Réduisons au dénominateur commun $D = n(n+1)(n+1)!$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{D} = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{D} = -\frac{1}{D}.$$

Comme $D > 0$, $v_{n+1} - v_n < 0$ **: la suite** (v_n) **est strictement décroissante.**

c. On a $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!}$, qui tend vers 0. Avec a) et b), les suites sont adjacentes. **Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite** $\ell = e$**.** De plus, $u_n < e < v_n$ pour tout $n \geq 1$, par stricte monotonie.

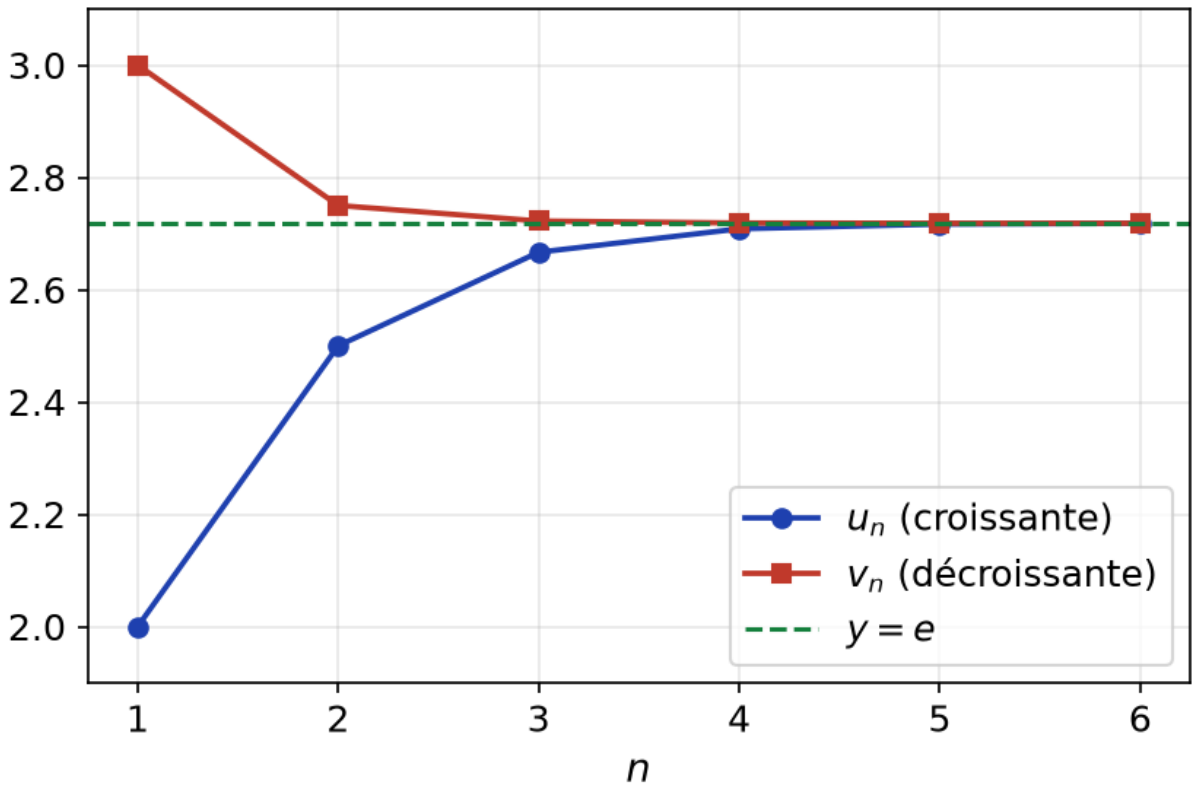
d. Supposons $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. D'après c), $u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q \cdot q!}$. Multiplions par $q \cdot q! > 0$:

$$q \cdot q!\ u_q < p \cdot q! < q \cdot q!\ u_q + 1.$$

Or $K = q!\ u_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ est un entier, car chaque $\frac{q!}{k!}$ en est un pour $k \leq q$. L'entier $p \cdot q!$ serait donc strictement compris entre les deux entiers consécutifs qK et $qK + 1$. C'est impossible.

Donc e **est irrationnel.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la réduction, 0,5 point pour le calcul du numérateur, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point (limite de la différence et théorème cité) ; d) 1,5 point : 0,5 point pour l'encadrement strict, 0,5 point pour K entier, 0,5 point pour la contradiction.

Exercice 5 : Problème – Bolzano-Weierstrass et lemme de Cesàro (5,5 points)

Partie A : valeurs d'adhérence

1. **Théorème de Bolzano-Weierstrass :** de toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

2. Supposons que (u_n) ne converge pas vers ℓ. En niant la définition, on obtient :

$$\exists\ \varepsilon > 0,$$
$$,\forall\ N \in \mathbb{N},$$
$$,\exists\ n \geq N,$$
$$,|u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

Il y a donc une infinité d'indices n tels que $|u_n - \ell| \geq \varepsilon$. On construit ainsi une extractrice φ strictement croissante avec $|u_{\varphi(k)} - \ell| \geq \varepsilon$ pour tout k.

La suite $(u_{\varphi(k)})$ est bornée, car (u_n) l'est. Par Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite $(u_{\varphi(\psi(k))})$ qui converge vers un réel ℓ'. En passant à la limite dans l'inégalité large, $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon$, donc $\ell' \neq \ell$.

Or $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante, donc ℓ' est une valeur d'adhérence de (u_n) distincte de ℓ. C'est contraire à l'hypothèse. **Donc (u_n) converge vers ℓ.**

Partie B : moyennes de Cesàro

3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \to 0$, il existe $N_1 \geq 1$ tel que $|u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $k > N_1$. Posons $S = |u_1 + \ldots + u_{N_1}|$, qui ne dépend pas de n. Pour $n > N_1$, l'inégalité triangulaire donne :

$$|c_n| \leq \frac{S}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n} |u_k| \leq \frac{S}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{S}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite, $\frac{S}{n} \to 0$, donc il existe N_2 tel que $\frac{S}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq N_2$. Pour $n \geq \max(N_1 + 1, N_2)$, on obtient $|c_n| \leq \varepsilon$. **Donc (c_n) converge vers 0.**

4. Posons $w_n = u_n - \ell$, qui tend vers 0. Ses moyennes de Cesàro valent

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$\frac{w_1+\ldots+w_n}{n} = c_n - \ell$. D'après 3, elles tendent vers 0. **Donc** $c_n \to \ell$ **.**

Réciproque fausse : prenons $u_n = (-1)^n$. Alors $c_n = 0$ si n est pair et $c_n = -\frac{1}{n}$ si n est impair, donc $c_n \to 0$. **Pourtant** (u_n) **diverge**, puisque ses termes pairs valent 1 et ses termes impairs -1.

5. Posons $w_k = u_{k+1} - u_k$, qui tend vers a. D'après 4, ses moyennes de Cesàro tendent vers a. Or la somme télescope :

$$\frac{w_1 + \ldots + w_n}{n} = \frac{u_{n+1} - u_1}{n}.$$

Comme $\frac{u_1}{n} \to 0$, on en déduit $\frac{u_{n+1}}{n} \to a$. Enfin $\frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n} \cdot \frac{n}{n+1}$ tend vers $a \times 1 = a$. **Donc** $\frac{u_n}{n} \to a$ **.**

Barème : 1) 0,5 point ; 2) 1,5 point : 0,5 point pour la négation, 0,5 point pour la double extraction, 0,5 point pour la contradiction ; 3) 1,5 point : 0,5 point pour le découpage de la somme, 0,5 point pour le choix de N1 et N2, 0,5 point pour la conclusion ; 4) 1 point : 0,5 point pour la généralisation, 0,5 point pour le contre-exemple ; 5) 1 point : 0,5 point pour le télescopage, 0,5 point pour la conclusion.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : borne supérieure et convergence des suites

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Nombres réels et suites » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** nombres réels et suites.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la

page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.