Corrigé du contrôle de maths sup : applications linéaires et théorème du rang

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours sur les projecteurs	4 points
Exercice 2 : Noyau et image d'un endomorphisme de R3	3,5 points
Exercice 3 : Opérateur de différence sur les polynômes	5 points
Exercice 4 : Parité et symétrie d'un espace de fonctions	3 points
Exercice 5 : Suite des noyaux itérés	4,5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours sur les projecteurs (4 points)

a. Comme $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On pose $p(x) = x_F$: c'est le projecteur sur F parallèlement à G.

Linéarité : si $x = x_F + x_G$, $y = y_F + y_G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x + \mu y = (\lambda x_F + \mu y_F) + (\lambda x_G + \mu y_G)$ avec le premier terme dans F et le second dans G, car ce sont des sous-espaces. Par unicité de la décomposition, $p(\lambda x + \mu y) = \lambda p(x) + \mu p(y)$.

Idempotence : $p(x) = x_F$ s'écrit $x_F + 0$ avec $x_F \in F$ et $0 \in G$, donc

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$p(p(x)) = x_F = p(x)$. **Ainsi** p **est linéaire et** $p \circ p = p$ **.**

b. Si $y \in \operatorname{Im} p$, il existe x tel que $y = p(x)$, donc $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$: $y \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id})$. Réciproquement, si $p(y) = y$, alors y est l'image de y par p, donc $y \in \operatorname{Im} p$. **Par double inclusion,** $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id})$ **.**

c. Intersection : si $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$, alors d'après b) $x = p(x) = 0$. Donc $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$.

Somme : pour $x \in E$, on écrit $x = (x - p(x)) + p(x)$. On a $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = 0$, donc $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$. **Donc** $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ **.** (On n'a pas supposé E de dimension finie.)

d. Pour $x \in E$, la décomposition de c) est $x = (x - p(x)) + p(x)$ avec $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$. La composante sur $\operatorname{Im} p$ est $p(x)$: p **est le projecteur sur** $\operatorname{Im} p$ **parallèlement à** $\operatorname{Ker} p$ **.**

Barème : a) 1 point (0,5 pour la définition par la décomposition unique, 0,5 pour linéarité et idempotence) ; b) 1 point (0,5 par inclusion) ; c) 1,5 point (0,5 pour l'intersection, 1 pour la décomposition $x = (x - p(x)) + p(x)$ *) ; d) 0,5 point.*

Exercice 2 : Noyau et image d'un endomorphisme de R3 (3,5 points)

a. Chaque composante de $f(x, y, z)$ est une combinaison linéaire de x, y, z. Pour $u, v \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on vérifie donc composante par composante que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$. f **est un endomorphisme de** $\mathbb{R}^3$ **.**

b. $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f$ équivaut au système $x - y = 0$, $y - z = 0$, $z - x = 0$, c'est-à-dire $x = y = z$. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$, de base $\big((1, 1, 1)\big)$ car ce vecteur est non nul.

c. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$.

Notons $H = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$. Pour tout (x, y, z), $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$, donc $\operatorname{Im} f \subset H$. Or H est le noyau de la forme

linéaire $\varphi : (a,b,c) \to a+b+c$, qui est non nulle donc surjective sur $\mathbb{R}$; le théorème du rang donne $\dim H = 3-1 = 2$. Une inclusion entre sous-espaces de même dimension finie est une égalité : $\operatorname{rg} f = 2$ **et** $\operatorname{Im} f = H$ **.**

d. Le vecteur $(1,1,1)$ vérifie $1+1+1 = 3 \neq 0$, donc il n'est pas dans H : $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Comme $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 1+2 = 3$, $\operatorname{Ker} f$ **et** $\operatorname{Im} f$ **sont supplémentaires.**

e. Si $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} g$, le théorème du rang donne $3 = \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg} g = 2 \dim \operatorname{Ker} g$. C'est impossible car 3 est impair. **Aucun tel endomorphisme n'existe.**

Erreur fréquente : affirmer $\operatorname{Im} f = H$ après la seule inclusion, sans argument de dimension.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point (0,5 pour le système, 0,5 pour la base) ; c) 1 point (0,5 pour le rang, 0,5 pour l'inclusion et l'égalité des dimensions) ; d) 0,5 point ; e) 0,5 point.

Exercice 3 : Opérateur de différence sur les polynômes (5 points)

a. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la composition par $X+1$ est linéaire, donc $\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) = \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q)$. De plus $\deg P(X+1) = \deg P \leq n$, donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Δ **est un endomorphisme de** $\mathbb{R}_n[X]$**.**

b. Par la formule du binôme, $\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$. Le coefficient de X^{k-1} vaut $[\text{eft?}](\binom{k}{k-1} \to)) = k \neq 0$: $\Delta(X^k)$ **est de degré** $k-1$**, de coefficient dominant** k**.**

Soit $P = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ avec $a_d \neq 0$ et $d \geq 1$. Par linéarité, $\Delta(P) = \sum_{j=1}^{d} a_j \Delta(X^j)$ (car $\Delta(1) = 0$). Les termes d'indice $j \leq d-1$ sont de degré au plus $d-2$, et le terme $a_d \Delta(X^d)$ a pour coefficient dominant $d\, a_d \neq 0$ en degré $d-1$. **Donc** $\deg \Delta(P) = d-1$ **.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

c. Les constantes vérifient $\Delta(c) = c - c = 0$. Si $\deg P = d \geq 1$, $\Delta(P)$ est de degré $d-1 \geq 0$, donc non nul. $\mathrm{Ker}\,\Delta = \mathbb{R}_0[X]$, l'ensemble des polynômes constants.

d. D'après b) et c), pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta(P)$ est nul ou de degré au plus $n-1$, donc $\mathrm{Im}\,\Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Le théorème du rang donne $\mathrm{rg}\,\Delta = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$. **Donc** $\mathrm{Im}\,\Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$**.**

e. Chaque application de Δ fait baisser le degré d'au moins 1 (et annule les constantes). Par récurrence, $\Delta^k(P) \in \mathbb{R}_{n-k}[X]$ pour $k \leq n$, donc $\Delta^n(P)$ est constant et $\Delta^{n+1}(P) = 0$: $\Delta^{n+1} = 0$**.** Par b), $\Delta^k(X^n)$ est de degré $n-k$ et de coefficient dominant $n(n-1)\dots(n-k+1)$; pour $k = n$, on obtient $\Delta^n(X^n) = n! \neq 0$. **Donc** $\Delta^n \neq 0$**.**

f. Existence : comme $n \geq 3$, $X^2 \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Im}\,\Delta$, donc il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta(Q) = X^2$. Le polynôme $P = Q - Q(0)$ convient, car Δ annule les constantes et $P(0) = 0$.

Unicité : si P_1 et P_2 conviennent, $\Delta(P_1 - P_2) = 0$, donc $P_1 - P_2$ est constant d'après c), et cette constante vaut $P_1(0) - P_2(0) = 0$.

Vérification : avec $P = \dfrac{X(X-1)(2X-1)}{6}$, on a $P(0) = 0$ et

$$6\big(P(X+1) - P(X)\big) = X(X+1)(2X+1) - X(X-1)(2X-1) = X\big[(2X^2+3X+1) - (2X^2-3X+1)\big] = 6X^2.$$

Donc $\Delta(P) = X^2$ et $\deg P = 3 \leq n$: c'est l'unique solution.

En évaluant l'égalité $P(X+1) - P(X) = X^2$ en k, puis en sommant (somme télescopique) :

$$\sum_{k=0}^{N} k^2 = \sum_{k=0}^{N} \big(P(k+1) - P(k)\big) = P(N+1) - P(0).$$

$$\sum_{k=0}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point (0,5 pour le binôme, 0,5 pour le degré de $\Delta(P)$) ; c) 1 point ; d) 1 point (0,5 pour l'inclusion, 0,5 pour le théorème du rang) ; e) 0,5 point ; f) 1 point (0,5 pour existence et unicité, 0,25 pour la vérification, 0,25 pour la somme).

Exercice 4 : Parité et symétrie d'un espace de fonctions (3 points)

a. Pour $f, g \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$:
$s(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \big(\lambda s(f) + \mu s(g)\big)(x)$. De plus
$s(s(f))(x) = s(f)(-x) = f(x)$. s **est linéaire et** $s \circ s = \mathrm{id}$ **.**

b. $s(f) = f$ signifie $f(-x) = f(x)$ pour tout x, et $s(f) = -f$ signifie $f(-x) = -f(x)$. $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) = \mathcal{P}$ **et** $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}) = \mathcal{I}$; ce sont en particulier des sous-espaces vectoriels de E.

c. Si $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, alors $f(x) = f(-x) = -f(x)$, donc $f = 0$. Pour $f \in E$, posons $g = \dfrac{f + s(f)}{2}$ et $h = \dfrac{f - s(f)}{2}$. Comme $s \circ s = \mathrm{id}$, $s(g) = g$ et $s(h) = -h$, donc $g \in \mathcal{P}$, $h \in \mathcal{I}$ et $f = g + h$. **Ainsi** $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ **.** Pour $f = g + h$ ainsi décomposée, $s(f) = g - h$: s **est la symétrie par rapport à** $\mathcal{P}$ **parallèlement à** $\mathcal{I}$ **.**

d. La composante de f sur $\mathcal{P}$ est g, donc $p = \dfrac{\mathrm{id} + s}{2}$. Pour tout réel x,
$p(\exp)(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\, x$ et $(\mathrm{id} - p)(\exp)(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\, x$.
$p(\exp) = \mathrm{ch}$ **et** $(\mathrm{id} - p)(\exp) = \mathrm{sh}$ **.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point ; c) 1 point (0,5 pour la somme directe, 0,5 pour l'identification de la symétrie) ; d) 1 point (0,5 pour l'expression de p, 0,5 pour ch et sh).

Exercice 5 : Suite des noyaux itérés (4,5 points)

a. Si $x \in N_k$, alors $u^{k+1}(x) = u\big(u^k(x)\big) = u(0) = 0$, donc $x \in N_{k+1}$.
$N_k \subset N_{k+1}$ **.**

b. L'inclusion $N_{p+1} \subset N_{p+2}$ vient de a). Soit $x \in N_{p+2}$:
$u^{p+1}\big(u(x)\big) = u^{p+2}(x) = 0$, donc $u(x) \in N_{p+1} = N_p$. Ainsi
$u^{p+1}(x) = u^p\big(u(x)\big) = 0$, soit $x \in N_{p+1}$. **Donc** $N_{p+1} = N_{p+2}$ **.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Par récurrence sur $k \geq p$, la propriété « $N_k = N_{k+1}$ » est vraie au rang p et se propage d'un rang au suivant par l'argument précédent (appliqué à k au lieu de p). **Donc $N_k = N_p$ pour tout $k \geq p$.**

c. Supposons par l'absurde que $N_k \neq N_{k+1}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. D'après a), les inclusions $N_k \subset N_{k+1}$ sont alors strictes. Un sous-espace strict d'un espace de dimension finie est de dimension strictement plus petite, donc $d_{k+1} \geq d_k + 1$. Comme $d_0 = \dim \operatorname{Ker} \mathrm{id} = 0$, on obtient $d_{n+1} \geq n + 1 > \dim E$, ce qui est absurde.

L'ensemble des entiers k tels que $N_k = N_{k+1}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$: **elle admet un plus petit élément r, et $r \leq n$.** Pour $k < r$, N_k [\subsetneq?] N_{k+1}, donc $d_0 < d_1 < \ldots < d_r$.

d. On a $N_m = E$. D'après b) appliqué avec $p = r$, $N_k = N_r$ pour tout $k \geq r$. Si $m \geq r$, alors $N_r = N_m = E$. Si $m < r$, alors $E = N_m \subset N_r$ par a), donc $N_r = E$. Dans les deux cas $N_r = E$. Puisque $n \geq r$, $N_n = N_r = E$. **Donc $u^n = 0$.**

e. $D^k(P) = P^{(k)}$, et $P^{(k)} = 0$ si et seulement si $\deg P \leq k - 1$. $\operatorname{Ker} D^k = \mathbb{R}_{k-1}[X]$ pour $1 \leq k \leq n + 1$. En particulier $D^{n+1} = 0$ et $D^n(X^n) = n! \neq 0$: **l'indice de nilpotence de D est $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$.** Ici $d_k = k$ croît strictement jusqu'à $k = n + 1$. La majoration « $u^{\dim E} = 0$ » est donc atteinte : **on ne peut pas l'améliorer en général.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point (1 pour $N_{p+1} = N_{p+2}$, 0,5 pour la récurrence) ; c) 1 point (0,5 pour l'argument de dimension, 0,5 pour l'existence de r et la stricte croissance) ; d) 0,5 point ; e) 1 point (0,5 pour les noyaux, 0,5 pour l'indice et la conclusion).

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : applications linéaires et théorème du rang

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Applications linéaires » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** applications linéaires.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths sup sur ce thème

- Contrôle de maths sup : problème d'algèbre linéaire type concours

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.