

## Corrigé du contrôle de maths sup : applications linéaires et théorème du rang

### Barème du contrôle

| Exercice                                                         | Points           |
|------------------------------------------------------------------|------------------|
| Exercice 1 : Question de cours sur les projecteurs               | 4 points         |
| Exercice 2 : Noyau et image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ | 3,5 points       |
| Exercice 3 : Opérateur de différence sur les polynômes           | 5 points         |
| Exercice 4 : Parité et symétrie d'un espace de fonctions         | 3 points         |
| Exercice 5 : Suite des noyaux itérés                             | 4,5 points       |
| <b>Total</b>                                                     | <b>20 points</b> |

### Exercice 1 : Question de cours sur les projecteurs (4 points)

- a. Comme  $E = F \oplus G$ , tout  $x \in E$  s'écrit de manière unique  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ . On pose  $p(x) = x_F$  : c'est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

Linéarité : si  $x = x_F + x_G$ ,  $y = y_F + y_G$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , alors  
 $\lambda x + \mu y = (\lambda x_F + \mu y_F) + (\lambda x_G + \mu y_G)$  avec le premier terme dans  $F$  et le second dans  $G$ , car ce sont des sous-espaces. Par unicité de la décomposition,  
 $p(\lambda x + \mu y) = \lambda p(x) + \mu p(y)$ .

Idempotence :  $p(x) = x_F$  s'écrit  $x_F + 0$  avec  $x_F \in F$  et  $0 \in G$ , donc

$p(p(x)) = x_F = p(x)$ . Ainsi  $p$  est linéaire et  $p \circ p = p$ .

- b. Si  $y \in \text{Im } p$ , il existe  $x$  tel que  $y = p(x)$ , donc  $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$  :  
 $y \in \text{Ker}(p - \text{id})$ . Réciproquement, si  $p(y) = y$ , alors  $y$  est l'image de  $y$  par  $p$ , donc  
 $y \in \text{Im } p$ . **Par double inclusion**,  $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id})$ .

- c. Intersection : si  $x \in \text{Ker } p \cap \text{Im } p$ , alors d'après b)  $x = p(x) = 0$ . Donc  
 $\text{Ker } p \cap \text{Im } p = \{0\}$ .

Somme : pour  $x \in E$ , on écrit  $x = (x - p(x)) + p(x)$ . On a  $p(x) \in \text{Im } p$  et  
 $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = 0$ , donc  $x - p(x) \in \text{Ker } p$ . **Donc**  
 $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ . (On n'a pas supposé  $E$  de dimension finie.)

- d. Pour  $x \in E$ , la décomposition de c) est  $x = (x - p(x)) + p(x)$  avec  $p(x) \in \text{Im } p$  et  
 $x - p(x) \in \text{Ker } p$ . La composante sur  $\text{Im } p$  est  $p(x)$  :  **$p$  est le projecteur sur**  
 $\text{Im } p$  **parallèlement à**  $\text{Ker } p$ .

Barème : a) 1 point (0,5 pour la définition par la décomposition unique, 0,5 pour linéarité et idempotence) ;  
b) 1 point (0,5 par inclusion) ; c) 1,5 point (0,5 pour l'intersection, 1 pour la décomposition  
 $x = (x - p(x)) + p(x)$ ) ; d) 0,5 point.

## **Exercice 2 : Noyau et image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (3,5 points)**

---

- a. Chaque composante de  $f(x, y, z)$  est une combinaison linéaire de  $x, y, z$ . Pour  $u, v \in \mathbb{R}^3$   
et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on vérifie donc composante par composante que  
 $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ .  **$f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .**
- b.  $(x, y, z) \in \text{Ker } f$  équivaut au système  $x - y = 0$ ,  $y - z = 0$ ,  $z - x = 0$ , c'est-à-dire  
 $x = y = z$ .  $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 1, 1))$ , de base  $((1, 1, 1))$  car ce vecteur est non  
nul.
- c. D'après le théorème du rang,  $\text{rg } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f = 3 - 1 = 2$ .

Notons  $H = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$ . Pour tout  $(x, y, z)$ ,  
 $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$ , donc  $\text{Im } f \subset H$ . Or  $H$  est le noyau de la forme

linéaire  $\varphi : (a, b, c) \rightarrow a + b + c$ , qui est non nulle donc surjective sur  $\mathbb{R}$  ; le théorème du rang donne  $\dim H = 3 - 1 = 2$ . Une inclusion entre sous-espaces de même dimension finie est une égalité :  $\operatorname{rg} f = 2$  et  $\operatorname{Im} f = H$ .

- d. Le vecteur  $(1, 1, 1)$  vérifie  $1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$ , donc il n'est pas dans  $H$  :  
 $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ . Comme  $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 1 + 2 = 3$ ,  $\operatorname{Ker} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont supplémentaires.
- e. Si  $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} g$ , le théorème du rang donne  $3 = \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg} g = 2 \dim \operatorname{Ker} g$ . C'est impossible car 3 est impair. **Aucun tel endomorphisme n'existe.**

**Erreur fréquente :** affirmer  $\operatorname{Im} f = H$  après la seule inclusion, sans argument de dimension.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point (0,5 pour le système, 0,5 pour la base) ; c) 1 point (0,5 pour le rang, 0,5 pour l'inclusion et l'égalité des dimensions) ; d) 0,5 point ; e) 0,5 point.

### **Exercice 3 : Opérateur de différence sur les polynômes (5 points)**

---

- a. Pour  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , la composition par  $X + 1$  est linéaire, donc  $\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda P(X + 1) + \mu Q(X + 1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) = \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q)$ . De plus  $\deg P(X + 1) = \deg P \leq n$ , donc  $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ .  **$\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .**

- b. Par la formule du binôme,  $\Delta(X^k) = (X + 1)^k - X^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$ . Le coefficient de  $X^{k-1}$  vaut  $\binom{k}{k-1} = k \neq 0$  :  **$\Delta(X^k)$  est de degré  $k - 1$ , de coefficient dominant  $k$ .**

Soit  $P = \sum_{j=0}^d a_j X^j$  avec  $a_d \neq 0$  et  $d \geq 1$ . Par linéarité,  $\Delta(P) = \sum_{j=1}^d a_j \Delta(X^j)$  (car  $\Delta(1) = 0$ ). Les termes d'indice  $j \leq d - 1$  sont de degré au plus  $d - 2$ , et le terme  $a_d \Delta(X^d)$  a pour coefficient dominant  $d a_d \neq 0$  en degré  $d - 1$ . **Donc  $\deg \Delta(P) = d - 1$ .**

- c. Les constantes vérifient  $\Delta(c) = c - c = 0$ . Si  $\deg P = d \geq 1$ ,  $\Delta(P)$  est de degré  $d - 1 \geq 0$ , donc non nul.  $\text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[X]$ , l'ensemble des polynômes constants.
- d. D'après b) et c), pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\Delta(P)$  est nul ou de degré au plus  $n - 1$ , donc  $\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Le théorème du rang donne  $\text{rg } \Delta = (n + 1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . **Donc**  $\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .
- e. Chaque application de  $\Delta$  fait baisser le degré d'au moins 1 (et annule les constantes). Par récurrence,  $\Delta^k(P) \in \mathbb{R}_{n-k}[X]$  pour  $k \leq n$ , donc  $\Delta^n(P)$  est constant et  $\Delta^{n+1}(P) = 0$  :  $\Delta^{n+1} = 0$ . Par b),  $\Delta^k(X^n)$  est de degré  $n - k$  et de coefficient dominant  $n(n-1) \dots (n-k+1)$  ; pour  $k = n$ , on obtient  $\Delta^n(X^n) = n! \neq 0$ . **Donc**  $\Delta^n \neq 0$ .
- f. Existence : comme  $n \geq 3$ ,  $X^2 \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Im } \Delta$ , donc il existe  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\Delta(Q) = X^2$ . Le polynôme  $P = Q - Q(0)$  convient, car  $\Delta$  annule les constantes et  $P(0) = 0$ .

Unicité : si  $P_1$  et  $P_2$  conviennent,  $\Delta(P_1 - P_2) = 0$ , donc  $P_1 - P_2$  est constant d'après c), et cette constante vaut  $P_1(0) - P_2(0) = 0$ .

Vérification : avec  $P = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}$ , on a  $P(0) = 0$  et

$$6(P(X+1) - P(X)) = X(X+1)(2X+1) - X(X-1)(2X-1) = X[(2X^2 + 3X + 1) - (2X^2 - 3X + 1)] = 6X^2.$$

Donc  $\Delta(P) = X^2$  et  $\deg P = 3 \leq n$  : c'est l'unique solution.

En évaluant l'égalité  $P(X+1) - P(X) = X^2$  en  $k$ , puis en sommant (somme télescopique) :

$$\sum_{k=0}^N k^2 = \sum_{k=0}^N (P(k+1) - P(k)) = P(N+1) - P(0).$$

$$\sum_{k=0}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point (0,5 pour le binôme, 0,5 pour le degré de  $\Delta(P)$ ) ; c) 1 point ; d) 1 point (0,5 pour l'inclusion, 0,5 pour le théorème du rang) ; e) 0,5 point ; f) 1 point (0,5 pour existence et unicité, 0,25 pour la vérification, 0,25 pour la somme).

## Exercice 4 : Parité et symétrie d'un espace de fonctions (3 points)

---

- a. Pour  $f, g \in \mathcal{E}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}$  :
- $$s(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = (\lambda s(f) + \mu s(g))(x). \text{ De plus } s(s(f))(x) = s(f)(-x) = f(x). \text{ } s \text{ est linéaire et } s \circ s = \text{id}.$$
- b.  $s(f) = f$  signifie  $f(-x) = f(x)$  pour tout  $x$ , et  $s(f) = -f$  signifie  $f(-x) = -f(x)$ .  $\text{Ker}(s - \text{id}) = \mathcal{P}$  et  $\text{Ker}(s + \text{id}) = \mathcal{I}$  ; ce sont en particulier des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{E}$ .
- c. Si  $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ , alors  $f(x) = f(-x) = -f(x)$ , donc  $f = 0$ . Pour  $f \in \mathcal{E}$ , posons  $g = \frac{f + s(f)}{2}$  et  $h = \frac{f - s(f)}{2}$ . Comme  $s \circ s = \text{id}$ ,  $s(g) = g$  et  $s(h) = -h$ , donc  $g \in \mathcal{P}$ ,  $h \in \mathcal{I}$  et  $f = g + h$ . Ainsi  $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ . Pour  $f = g + h$  ainsi décomposée,  $s(f) = g - h$  :  $s$  est la symétrie par rapport à  $\mathcal{P}$  parallèlement à  $\mathcal{I}$ .
- d. La composante de  $f$  sur  $\mathcal{P}$  est  $g$ , donc  $p = \frac{\text{id} + s}{2}$ . Pour tout réel  $x$ ,
- $$p(\exp)(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch } x \text{ et } (\text{id} - p)(\exp)(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x.$$
- $$p(\exp) = \text{ch} \text{ et } (\text{id} - p)(\exp) = \text{sh}.$$

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point ; c) 1 point (0,5 pour la somme directe, 0,5 pour l'identification de la symétrie) ; d) 1 point (0,5 pour l'expression de  $p$ , 0,5 pour  $\text{ch}$  et  $\text{sh}$ ).

## Exercice 5 : Suite des noyaux itérés (4,5 points)

---

- a. Si  $x \in N_k$ , alors  $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0) = 0$ , donc  $x \in N_{k+1}$ .  
 $N_k \subset N_{k+1}$ .
- b. L'inclusion  $N_{p+1} \subset N_{p+2}$  vient de a). Soit  $x \in N_{p+2}$  :
- $$u^{p+1}(u(x)) = u^{p+2}(x) = 0, \text{ donc } u(x) \in N_{p+1} = N_p. \text{ Ainsi } u^{p+1}(x) = u^p(u(x)) = 0, \text{ soit } x \in N_{p+1}. \text{ Donc } N_{p+1} = N_{p+2}.$$

Par récurrence sur  $k \geq p$ , la propriété «  $N_k = N_{k+1}$  » est vraie au rang  $p$  et se propage d'un rang au suivant par l'argument précédent (appliqué à  $k$  au lieu de  $p$ ). **Donc**

$$N_k = N_p \text{ pour tout } k \geq p.$$

- c. Supposons par l'absurde que  $N_k \neq N_{k+1}$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ . D'après a), les inclusions  $N_k \subset N_{k+1}$  sont alors strictes. Un sous-espace strict d'un espace de dimension finie est de dimension strictement plus petite, donc  $d_{k+1} \geq d_k + 1$ . Comme  $d_0 = \dim \text{Ker id} = 0$ , on obtient  $d_{n+1} \geq n + 1 > \dim E$ , ce qui est absurde.

L'ensemble des entiers  $k$  tels que  $N_k = N_{k+1}$  est donc une partie non vide de  $\mathbb{N}$  : **elle admet un plus petit élément  $r$ , et  $r \leq n$** . Pour  $k < r$ ,  $N_k \subsetneq N_{k+1}$ , donc  $d_0 < d_1 < \dots < d_r$ .

- d. On a  $N_m = E$ . D'après b) appliqué avec  $p = r$ ,  $N_k = N_r$  pour tout  $k \geq r$ . Si  $m \geq r$ , alors  $N_r = N_m = E$ . Si  $m < r$ , alors  $E = N_m \subset N_r$  par a), donc  $N_r = E$ . Dans les deux cas  $N_r = E$ . Puisque  $n \geq r$ ,  $N_n = N_r = E$ . **Donc**  $u^n = 0$ .

- e.  $D^k(P) = P^{(k)}$ , et  $P^{(k)} = 0$  si et seulement si  $\deg P \leq k - 1$ .  
 $\text{Ker } D^k = \mathbb{R}_{k-1}[X]$  pour  $1 \leq k \leq n + 1$ . En particulier  $D^{n+1} = 0$  et  $D^n(X^n) = n! \neq 0$  : **l'indice de nilpotence de  $D$  est  $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$** . Ici  $d_k = k$  croît strictement jusqu'à  $k = n + 1$ . La majoration «  $u^{\dim E} = 0$  » est donc atteinte : **on ne peut pas l'améliorer en général.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point (1 pour  $N_{p+1} = N_{p+2}$ , 0,5 pour la récurrence) ; c) 1 point (0,5 pour l'argument de dimension, 0,5 pour l'existence de  $r$  et la stricte croissance) ; d) 0,5 point ; e) 1 point (0,5 pour les noyaux, 0,5 pour l'indice et la conclusion).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

## Après le corrigé du contrôle : applications linéaires et théorème du rang

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Applications linéaires](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés applications linéaires**.

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

## **Autres contrôles de maths sup sur ce thème**

---

- [Contrôle de maths sup : problème d'algèbre linéaire type concours](#)