

Corrigé du contrôle de maths spé : théorème spectral et matrices positives

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours	4 points
Exercice 2 : Diagonalisation orthogonale d'une matrice symétrique	4 points
Exercice 3 : Matrices de Gram	3 points
Exercice 4 : Quotient de Rayleigh	3 points
Exercice 5 : Problème : racine carrée et décomposition polaire	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

- a. **Version géométrique.** Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, c'est-à-dire tel que $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$. Alors E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; autrement dit, **il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u .**

Version matricielle. Pour toute $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que $S = P D P^{-1} = P D {}^t P$.

- b. Supposons $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(S)$ et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $\langle Sx, x \rangle = \lambda |x|^2 \geq 0$, et comme $|x|^2 > 0$, on obtient $\lambda \geq 0$.

Réciproquement, supposons $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$. D'après le théorème spectral, $S = P D {}^t P$ avec P orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les λ_i étant les valeurs propres de S . Soit $x \in \mathbb{R}^n$; posons $y = {}^t P x$. Alors

$$\langle Sx, x \rangle = {}^t x P D {}^t P x = {}^t y D y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0.$$

Ainsi $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

- c. **Caractérisation :** $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Si S est définie positive et $Sx = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors $\lambda |x|^2 = \langle Sx, x \rangle > 0$, donc $\lambda > 0$. Réciproquement, si tous les λ_i sont strictement positifs et $x \neq 0$, alors $y = {}^t P x \neq 0$ car ${}^t P$ est inversible ; donc au moins un y_i est non nul et $\sum \lambda_i y_i^2 > 0$.

Barème : a) 0,5 point par version correctement énoncée (base orthonormée exigée) ; b) 0,75 point pour le sens direct, 1,25 point pour la réciproque avec le changement de variable $y = {}^t P x$; c) 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour la preuve.

Exercice 2 : Diagonalisation orthogonale d'une matrice symétrique (4 points)

- a. La matrice A est réelle et symétrique (${}^t A = A$). **D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.**
- b. On développe $\det(A - \lambda I_3)$ selon la première ligne :

$$\det(A - \lambda I_3) = (2 - \lambda)[(1 - \lambda)(-\lambda) - 4] + 2 \times (2\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 4) + 4\lambda.$$

En développant, on trouve $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8$. Donc $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8$. Le réel 1 est racine évidente, et la division donne

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 2).$$

Les valeurs propres de A sont 4, 1 et -2. Contrôle : leur somme vaut $3 = \text{tr}(A)$.

- c. Chaque valeur propre est simple, donc chaque sous-espace propre est une droite.

Pour $\lambda = 4$: le système $(A - 4I_3)X = 0$ donne $-2x - 2y = 0$ et $-2y - 4z = 0$, soit $x = -y$ et $y = -2z$. On obtient $E_4 = \text{Vect}(2, -2, 1)$.

Pour $\lambda = 1$: on trouve $x = 2y$ et $z = -2y$, d'où $E_1 = \text{Vect}(-2, -1, 2)$.

Pour $\lambda = -2$: on trouve $y = 2x$ et $z = y$, d'où $E_{-2} = \text{Vect}(1, 2, 2)$.

Ces trois vecteurs sont deux à deux orthogonaux, comme le prévoit le théorème spectral (par exemple $(2, -2, 1) \cdot (-2, -1, 2) = -4 + 2 + 2 = 0$). Chacun a pour norme $\sqrt{3}$. En les normant, on obtient

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice P est orthogonale et $A = P D {}^t P$.

- d. La matrice A admet la valeur propre $-2 < 0$. **D'après l'exercice 1, A n'est donc pas positive** : par exemple $\langle A v, v \rangle = -18$ pour $v = (1, 2, 2)$.

Ensuite, $A + c I_3 = P (D + c I_3) {}^t P$ est symétrique, de valeurs propres $4 + c$, $1 + c$ et $c - 2$. Elle est définie positive si et seulement si ces trois réels sont strictement positifs, c'est-à-dire si et seulement si $c > 2$. **L'ensemble cherché est $]2, +\infty[$.**

Barème : a) 0,5 point (symétrie réelle et nom du théorème) ; b) 0,5 point pour le calcul du déterminant, 0,5 point pour la factorisation ; c) 0,25 point par sous-espace propre, 0,75 point pour P orthogonale (normalisation) et D ; d) 0,5 point pour la non-positivité, 0,5 point pour l'intervalle.

Exercice 3 : Matrices de Gram (3 points)

- a. On a ${}^t S = {}^t A {}^t ({}^t A) = {}^t A A = S$, donc S est symétrique. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \langle Sx, x \rangle &= {}^t x {}^t A A x = |Ax|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- b. Si $Ax = 0$, alors $Sx = {}^t A (Ax) = 0$: ainsi $\ker A \subset \ker S$. Inversement, si $Sx = 0$, alors $|Ax|^2 = \langle Sx, x \rangle = 0$, donc $Ax = 0$. **Ainsi** $\ker S = \ker A$.

Comme S est positive, ses valeurs propres sont positives. Par conséquent, S est définie positive si et seulement si $0 \notin \text{Sp}(S)$, c'est-à-dire $\ker S = \{0\}$. Cela équivaut à $\ker A = \{0\}$, donc à l'inversibilité de A (matrice carrée). **Ainsi** $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ **si et seulement si** $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

- c. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, $S = P D {}^t P$ avec P orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $\lambda_i \geq 0$. Posons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = \Delta {}^t P$. Alors

$${}^t B B = P \Delta \Delta {}^t P = P D {}^t P = S.$$

Toute matrice symétrique positive s'écrit donc ${}^t B B$.

Erreur fréquente : écrire « S est inversible donc définie positive » sans rappeler d'abord que S est positive ; une matrice symétrique inversible peut avoir des valeurs propres négatives.

Barème : a) 0,5 point pour la symétrie, 0,5 point pour l'identité avec $|Ax|^2$; b) 0,5 point pour l'égalité des noyaux, 0,5 point pour l'équivalence ; c) 1 point (construction de B et vérification).

Exercice 4 : Quotient de Rayleigh (3 points)

- a. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $S e_i = \lambda_i e_i$ pour tout i . Soit $x = \sum x_i e_i$. Par linéarité, $Sx = \sum \lambda_i x_i e_i$. Comme la base est orthonormée, on obtient

$$\langle Sx, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \text{ et } |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Puisque $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$ et $x_i^2 \geq 0$, on en déduit $\lambda_1 \sum x_i^2 \leq \sum \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum x_i^2$. **Donc** $\lambda_1 |x|^2 \leq \langle Sx, x \rangle \leq \lambda_n |x|^2$.

- b. Pour $|x| = 1$, on a $\langle Sx, x \rangle \leq \lambda_n$, avec égalité pour $x = e_n$. Le maximum existe donc et vaut λ_n . De plus, l'égalité équivaut à $\sum (\lambda_n - \lambda_i) x_i^2 = 0$. C'est une somme de termes positifs, donc $x_i = 0$ dès que $\lambda_i < \lambda_n$. **Le maximum est atteint exactement aux vecteurs unitaires de $E_{\lambda_n}(S)$.**

- c. Pour $X = (x, y, z)$, on a ${}^t X A X = 2x^2 + y^2 + 2 \times (-2)xy + 2 \times (-2)yz = q(x, y, z)$, où A est la matrice de l'exercice 2. Ses valeurs propres extrêmes sont -2 et 4 .

Sur la sphère unité, le maximum de q vaut 4 , atteint en $\pm \frac{1}{3}(2, -2, 1)$; le minimum vaut -2 , atteint en $\pm \frac{1}{3}(1, 2, 2)$. Vérification : $q(2, -2, 1) = 8 + 4 + 16 + 8 = 36 = 4 \times 9$.

Barème : a) 0,5 point pour la base orthonormée de vecteurs propres, 1 point pour les deux expressions et l'encadrement ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour la matrice de q , 0,5 point pour les extremums et les points.

Exercice 5 : Problème : racine carrée et décomposition polaire (6 points)

Existence et unicité de la racine carrée

- a. Par le théorème spectral, $S = P D {}^t P$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme S est positive, les λ_i sont positifs (exercice 1). Posons $R = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) {}^t P$.

Alors R est symétrique, et ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_i}$ sont positives : $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin $R^2 = P D {}^t P = S$, car ${}^t P P = I_n$. **La matrice R convient.**

- b. On a $R' S = R'^3 = S R'$: les matrices R' et S commutent. Soit alors $x \in E_\lambda(S)$. On calcule $S(R' x) = R'(Sx) = \lambda R' x$, donc $R' x \in E_\lambda(S)$: **chaque sous-espace propre de S est stable par R' .**

Notons τ l'endomorphisme induit par R' sur $E_\lambda(S)$. Il est autoadjoint pour le produit scalaire restreint, car R' est symétrique. Par le théorème spectral, τ est donc diagonalisable. Si μ est une valeur propre de τ et $x \neq 0$ un vecteur propre, alors $\mu |x|^2 = \langle R' x, x \rangle \geq 0$, donc $\mu \geq 0$. De plus, $\tau^2 = \lambda \text{id}$, donc $\mu^2 = \lambda$, et finalement $\mu = \sqrt{\lambda}$.

Ainsi τ est diagonalisable avec pour seule valeur propre $\sqrt{\lambda}$: $\tau = \sqrt{\lambda} \text{id}$. Le même raisonnement s'applique à R . Par conséquent, R et R' coïncident sur chaque $E_\lambda(S)$. Or S est diagonalisable, donc $\mathbb{R}^n$ est la somme de ces sous-espaces. **On conclut que $R' = R$: la racine carrée positive est unique.**

Décomposition polaire

c. **Existence.** Posons $S = {}^t M M$. D'après l'exercice 3, $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, car M est inversible. Soit R sa racine carrée positive. Ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_i}$ sont strictement positives, donc $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et R est inversible. Posons $O = M R^{-1}$. Comme R^{-1} est symétrique,

$${}^t O O = R^{-1} {}^t M M R^{-1}, R^{-1} R^2 R^{-1} = I_n.$$

Donc $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $M = OR$.

Unicité. Si $M = OR$ avec O orthogonale et $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors ${}^t M M = {}^t R {}^t O O R = R^2$. Ainsi R est une racine carrée positive de ${}^t M M$; par la question b, elle est unique. Ensuite $O = M R^{-1}$ est imposée. **Le couple (O, R) existe et il est unique.**

d. On calcule ${}^t M M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Cette matrice a pour valeurs propres 9, de vecteur propre $(1, 1)$, et -1, de vecteur propre $(1, -1)$. Sa racine carrée positive est donc

$$R = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

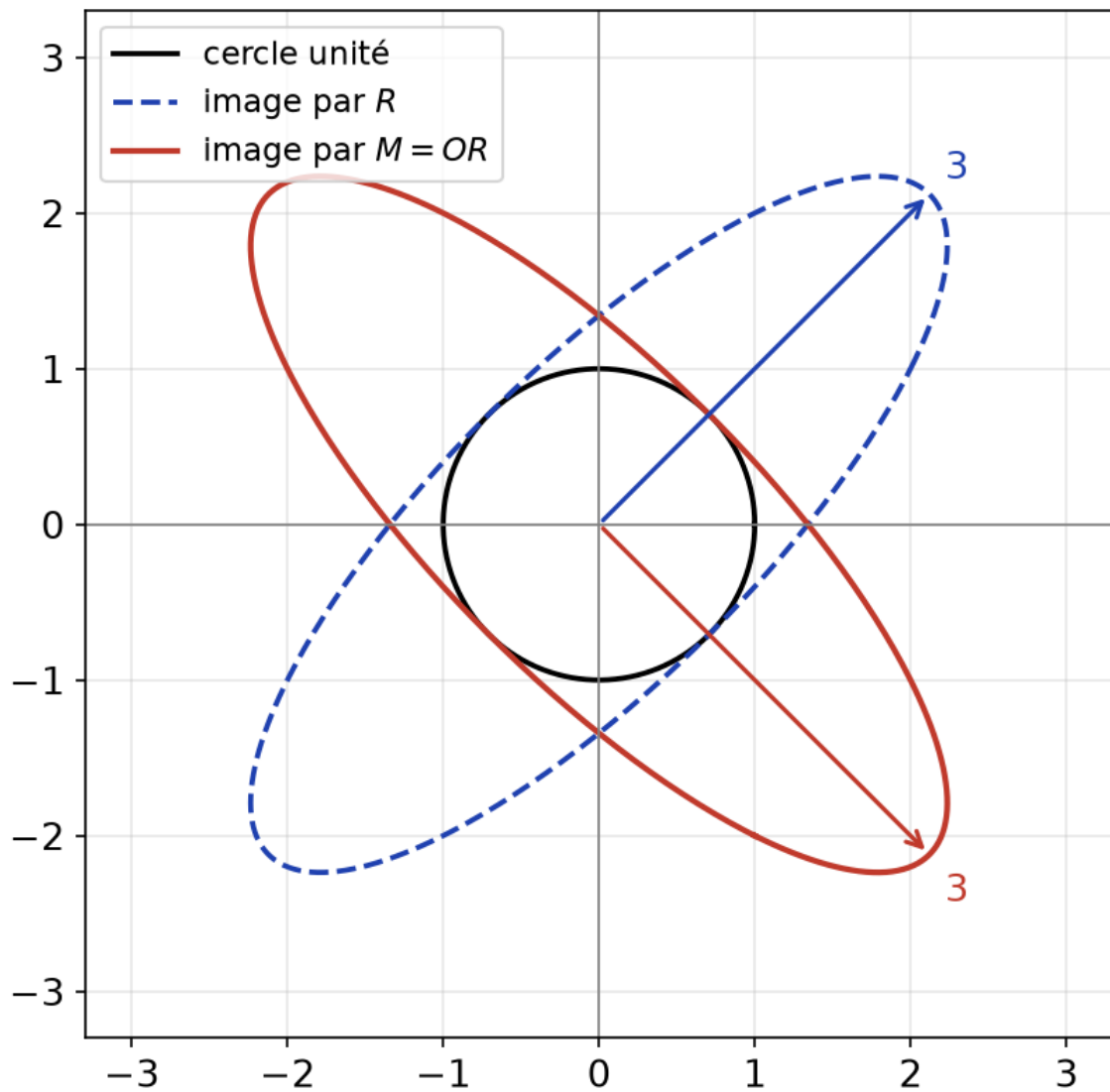
On vérifie que $R^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Ensuite $R^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis

$$O = M R^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $M = OR$ avec $R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et O , de déterminant 1, la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

- e. Pour $|x| = 1$, on a $|Mx|^2 = \langle {}^t M M x, x \rangle$. D'après l'exercice 4 appliqué à ${}^t M M$, de valeurs propres 1 et 9, cette quantité est comprise entre 1 et 9, et ces bornes sont atteintes. **Donc** $\max |Mx| = 3$, **atteint en** $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, **et** $\min |Mx| = 1$, **atteint en** $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

Géométriquement, R transforme le cercle unité en une ellipse de demi-axes 3 (direction $(1, 1)$) et 1 (direction $(1, -1)$). Ensuite, O la fait tourner d'un quart de tour dans le sens indirect. **L'image du cercle unité par M est donc une ellipse de demi-grand axe 3 dirigé par $(1, -1)$ et de demi-petit axe 1 dirigé par $(1, 1)$.**



Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point pour la commutation et la stabilité, 0,75 point pour l'étude de l'endomorphisme induit, 0,25 point pour la conclusion par somme directe ; c) 1 point pour l'existence (dont $\odot$ orthogonale), 0,5 point pour l'unicité ; d) 0,5 point pour R , 0,5 point pour O et sa nature ; e) 0,5 point pour les extremums, 0,5 point pour l'ellipse.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : théorème spectral et matrices positives

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Théorème spectral](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [théorème spectral](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).